Université de Paris XI | **L1 – Calculus Math 151**
Mathématiques | **1er semestre 2009-10**

Feuille d'exercices 8

Fonctions de deux variables (II)

Exercice 8.1.— Équations de droites et de plan, fonctions affines

1. Donner (en justifiant) l'équation, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x, y), de la droite passant par le point $(-3, 2)$ et orthogonale au vecteur $(23, 34)$.

2. Donner (en justifiant) l'équation, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z), du plan passant par le point $(-3, 2, -1)$ et orthogonal au vecteur $(23, 34, 45)$.

3. Sur un site internet, on peut commander des carottes et des pommes de terre ; on note α et β les prix au kilo. On paie un montant fixe $\gamma = 10$ euros pour la livraison.

a. Donner, en fonction des poids de carottes et de pommes de terre commandés, le prix à payer. Montrer que ce prix est une fonction affine de ces deux quantités.

b. Yvan a commandé 3 kilos de carottes et 2 kilos de pommes de terre, et a payé 18 euros. Zygomar a payé 24 euros pour 2 kilos de carottes et 10 de pommes de terre. Calculer les prix au kilo et les frais de livraison.

c. Soit P le plan de l'espace $\mathbb{R}^3$ passant par les points $(0, 0, 10)$, $(3, 2, 18)$ et $(2, 10, 24)$. Donner l'équation du plan P.

Exercice 8.2.— Fonctions partielles

1. Soit $f_1(x, y) = \sin(x) + y$.

a. Déterminer les fonctions partielles de f_1 en un point (x_0, y_0) quelconque.

b. Tracer rapidement l'allure des graphes des fonctions partielles $x \mapsto f_1(x, y_0)$ pour $y_0 = 0$, puis $y_0 = 1$, puis $y_0 = 2$ sur un même dessin.

c. De même, tracer les graphes des fonctions partielles de la variable y pour les trois valeurs $x_0 = -\pi/2, 0, \pi/2$.

2. Mêmes questions pour $f_2(x, y) = y \sin(x)$.

3. (M) Mêmes questions pour $f_3(x, y) = \sin(x + y)$.

Exercice 8.3.— Modélisation par des fonctions de deux variables

Donner une formule pour chacune des fonctions suivantes.

1. L'aire $A(\ell_1, \ell_2)$ d'un rectangle en fonction de la longueur des côtés.

2. L'energie cinétique $E(m, v)$ d'un mobile en fonction de sa masse et de sa vitesse.

3. Le volume $V(r, h)$ d'un cylindre en fonction de son rayon r et de sa hauteur h.

4. La surface extérieure $S(x, y)$ d'un parallélépipède rectangle (un carton d'emballage !) de volume $1m^3$, en fonction de la largeur x et de la longueur y de sa base, exprimées en mètres.

5. L'énergie totale (cinétique et potentielle) d'un pendule simple de masse 1, de longueur 1 en fonction de l'angle θ avec la verticale et de $\theta'(t)$.

Exercice 8.4.— Dérivées partielles, plan tangent On donne le dessin des lignes de niveaux de la “presqu'ile” de l'exercice 6.1, c'est-à-dire de la fonction (l'unité est la centaine de mètres)

$$f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$

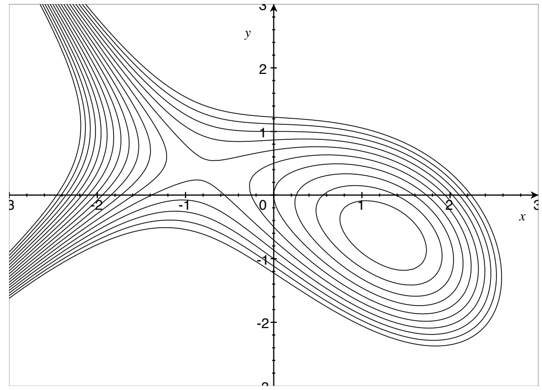
On a représenté les altitudes $0m$, $25m$, $50m$, *etc.*.

1. Localiser sur le dessin le (ou les) point(s) où le plan tangent au graphe de f est horizontal. On pourra s'aider des vues dessinées sur la feuille 6.

2. Rappeler l'équation du plan tangent au graphe de f en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Comment l'existence d'un plan tangent *horizontal* se traduit-elle sur les dérivées partielles ? En déduire les coordonnées exactes des points trouvés à la question précédente.

3. Soit P le plan tangent au graphe au point $(1, -1, f(1, -1))$. À l'aide du dessin des lignes de niveau, donner le signe des trois coordonnées d'un vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ orthogonal à ce plan.

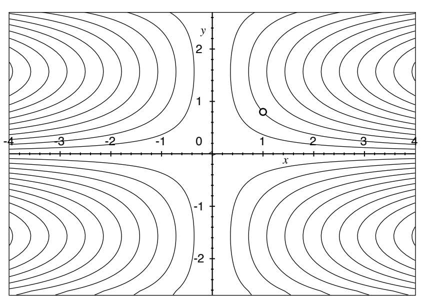
4. Donner l'équation de P, et vérifier la cohérence de votre réponse avec le résultat de la question précédente.

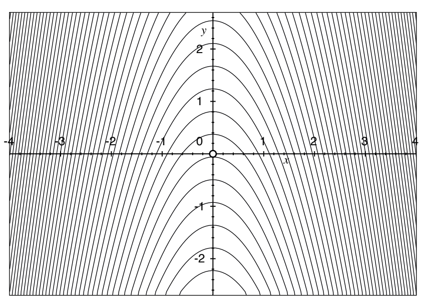


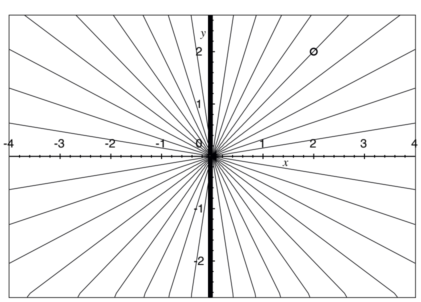
Exercice 8.5.— Calculs de dérivées partielles
Calculer les dérivées partielles des quatre fonctions de l'exercice 7.3.

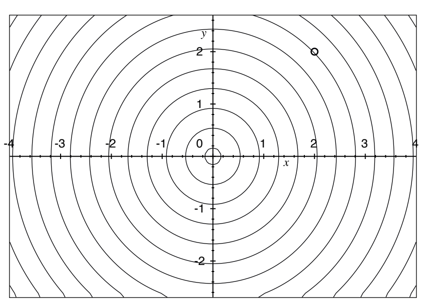
Exercice 8.6.— Dérivées partielles, formule de Taylor
Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles au point indiqué et écrire la formule de Taylor (en variables h, k). Donner l'équation du plan tangent au graphe, et un vecteur orthogonal. Vérifier que votre résultat est compatible avec le dessin des lignes de niveau.

$f_1(x, y) = x\sin(y)$ au point $(1, \pi/4)$; $\qquad f_2(x, y) = \tan(x^2 + y)$ au point $(0, 0)$;
$f_3(x, y) = \arctan(y/x)$ au point $(2, 2)$; $\qquad f_4(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ au point $(2, 2)$.









Exercice 8.7.— Dérivées partielles et approximations affines

1. Donner l'expression de la diagonale $d(x, y)$ d'un rectangle de côtés x et y.

2. On considère un rectangle de côtés x=30 cm et y=40 cm. En utilisant l'approximation affine de d (c'est-à-dire en négligeant le reste dans la formule de Taylor), donner une estimation de la variation de d lorsque x augmente de 4mm et y diminue de 1mm (sans utilisaer la calculatrice !). Calculer la longueur de la nouvelle diagonale à la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Exercice 8.8.— Dérivées partielles et approximations affines
On considère un container en carton de volume $1m^3$, dont la base a pour dimension $x = 2m$ et $y = 1m$. On veut fabriquer un deuxième container en carton de même volume, avec une base de côtés 195cm et 95cm. Donner (sans calculatrice) une estimation de la différence de surfaces extérieures entre les deux containers à l'aide l'approximation affine. Calculer la nouvelle surface à l'aide de la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Exercice 8.9.— Dérivées partielles et approximations affines
On mesure le rayon r et la hauteur h d'un cône, avec une incertitude de 3% sur le rayon, et de 2% sur la hauteur. Évaluez l'incertitude sur le volume $V(r, h) = \pi r^2 h/3$ du cône, à l'aide de l'approximation affine.

Exercice 8.10.— Une question de définition
Soit $f(x, y) = x^2 y^3$. On demande à deux étudiants de calculer le nombre $\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$.

- Le premier dit : "$f(y, x) = y^2 x^3$, je dérive par rapport à x et j'obtiens " $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x) = 3y^2x^2$".
- Le second dit : "je calcule la dérivée de f par rapport à x, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3$, puis j'échange x et y, et j'obtiens $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x) = 3yx^3$".

Qui a raison ?

Exercice 8.11.— Gradient

1. Sur le dessin des lignes de niveau de la "presqu'ile" (exercice 7.4), tracer la tangente à la ligne de niveau au point $(2, -2)$.

2. Que vaut le vecteur gradient au point $(2, -2)$? En déduire l'équation de la tangente à la ligne de niveau en ce point, et vérifier en comparant à la question précédente.

3. **a.** Un skieur se tient au point correspondant à $x = 2, y = -2$, les skis bien horizontaux, la pente vers sa gauche. Dans quelle direction (Nord, Nord-Ouest, ...) pointent ses skis ? **b.** Il décide maintenant de se lancer droit dans la pente. Vers quelle direction se tourne-t-il ?

Exercice 8.12.— Tangente à une ligne de niveau
Pour chacune des fonctions de l'exercice 7.6, tracer sur le dessin la tangente à la ligne de niveau passant par le point indiqué, puis calculer l'équation de cette droite.

Exercice 8.13.— Dérivation composée

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(t^2, 3t+2)$. Donner l'expression de $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

2. (M) Même question pour les fonctions $h(t) = f(t, t)$; $i(t) = f(1, t)$; $j(t) = f(\sin(t), \cos(t))$; $k(t) = f(e^t \sin(t), \ln(1 + t^2))$.

3. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer les dérivées partielles de la fonction $f(xy)$.

4. Même question pour la fonction $f(xy^2)$.

Exercice 8.14.— Cordes vibrantes

Soit F une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et c une constante. Montrer que la fonction définie par $f(x,t) = F(x+ct)$ vérifie l'équation de la corde vibrante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{pour tout } (x,t).$$

N.B. : la notation $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ représente la fonction f dérivée deux fois par rapport à la variable t, autrement dit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$