Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques

Examen partiel du 7 novembre 2012

L'examen dure 3 heures. Les documents, et calculatrices sont interdits.

Exercice 1.— Ensembles de définition (environ 6 points)

Déterminer, puis dessiner, l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y} \quad , \quad g(x,y) = \sqrt{y^2 - x} \quad , \quad h(x,y) = \frac{\ln(x)}{\sin(y)} \quad , \quad k(x,y) = \ln(\sin(x^2+y^2))$$

Exercice 2.— Lignes de niveaux (environ 6 points)

Pour chacune des fonctions suivantes, tracer l'allure de quelques lignes de niveaux.

$$f(x,y) = (x-y)^5 \quad , \quad g(x,y) = \exp(x^2+y^2) \quad , \quad h(x,y) = \sin(x)\sin(y) \quad , \quad k(x,y) = \exp(xy)$$

Remarques et conseils :

- *Pour chaque fonction, trois ou quatre lignes de niveaux (bien choisies) suffisent.*
- *Lorsque les lignes de niveaux ne sont pas des objets géométriques bien connus (droites, cercles, etc.), on vous demande juste une vague idée de l'allure de celles-ci ; en particulier, ne vous lancez pas dans des études de fonctions.*
- *Faire un dessin par fonction. N'hésitez pas à utiliser diffrentes couleurs pour les différentes lignes de niveaux d'une fonction.*

Exercice 3.— Recherche de points critiques (environ 4,5 points)

Déterminer l'ensemble des points critiques de chacune des fonctions suivantes.

$$f(x,y) = y^4 - 8y^2 - 4x^2 \quad , \quad g(x,y) = x^4 + 4x^3y - y^4 - 2x \quad , \quad h(x,y) = \cos(x+y)\cos(x-y)$$

Exercice 4.— Étude d'une fonction de deux variables (environ 12 points)

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$h(x,y) = -y^3 + 3y\sin(x).$$

1. Esquisser, sur un même dessin, les graphes des fonctions partielles suivantes (on voit demande seulement une esquisse rapide, pas d'étude de fonctions) :

$$\varphi_1 : x \mapsto h(x,0) \quad , \quad \varphi_2 : x \mapsto h(x,1) \quad , \quad \varphi_3 : x \mapsto h(x,-1)\,.$$

2. Même question avec les fonctions partielles :

$$\psi_1 : y \mapsto h(0, y) \quad , \quad \psi_2 : y \mapsto h\left(\frac{\pi}{2}, y\right) \quad , \quad \psi_3 : y \mapsto h(-\frac{\pi}{2}, y).$$

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction h.

4. Donner une équation cartésienne du plan tangent au graphe de h au point $\left(\frac{\pi}{2}, 1, 2\right)$.

5. Calculer les dérivées d'ordre 2 de h.

6. Déterminer l'ensemble des points critiques de la fonction h.

7. Pour chaque point critique, déterminer sa nature (dégénéré ou non, minimum, maximum, point selle).

8. La fonction h admet-elle un minimum global ? Si oui lequel ? Admet-elle un maxmum global ? Si oui, lequel ?

9. Parmi les quatre graphes ci-dessous, lequel représente celui de la fonction h ? (exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier votre réponse)

10. En vous aidant du graphe de h, esquisser l'allure de quelques lignes de niveaux de h (mêmes remarques et conseils que dans l'exercice 2). Sur le même dessin, esquisser l'allure du champ de gradient de h.