Estimées de décorrélations pour un modèle aléatoire dans le régime localisé

Trịnh Tuấn Phong
sous la direction de Frédéric Klopp

Laboratoire Analyse, Géométrie & Applications
Université Paris 13

02 Mai 2013

Séminaire d'équations aux dérivées partielles
IRMAR, Université de Rennes 1

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0]$ $\quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Deux inégalités importantes

L'estimée de Wegner (W) :

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{dist}(E,\sigma(H_\omega(\Lambda))) \leqslant \epsilon) \leq \frac{2\|s\rho(s)\|_\infty}{E-\epsilon}\epsilon|\Lambda|}$$

quel que soit le cube $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $0 < \epsilon < E$.

L'estimée de Minami (M) :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\#\{\sigma\left(H_\omega\left(\Lambda\right)\right) \cap J\} \geqslant 2\right) \leqslant C(|J||\Lambda|)^2/2a^2}$$

pour tout $J = [a,b] \subset (0,+\infty)$, et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$.

Remarque : (W) et (M) ne sont pas valables à l'énergie 0 (le bord inférieur du spectre presque sûr Σ).

Deux inégalités importantes

L'estimée de Wegner (W) :

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{dist}(E,\sigma(H_\omega(\Lambda))) \leqslant \epsilon) \leq \frac{2\|s\rho(s)\|_\infty}{E-\epsilon}\epsilon|\Lambda|}$$

quel que soit le cube $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $0 < \epsilon < E$.

L'estimée de Minami (M) :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\#\{\sigma\left(H_\omega\left(\Lambda\right)\right) \cap J\} \geqslant 2\right) \leqslant C(|J||\Lambda|)^2/2a^2}$$

pour tout $J = [a,b] \subset (0,+\infty)$, et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$.

Remarque : (W) et (M) ne sont pas valables à l'énergie 0 (le bord inférieur du spectre presque sûr Σ).

Deux inégalités importantes

L'estimée de Wegner (W) :

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{dist}(E, \sigma(H_\omega(\Lambda))) \leqslant \epsilon) \leq \frac{2\|s\rho(s)\|_\infty}{E-\epsilon}\epsilon|\Lambda|}$$

quel que soit le cube $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $0 < \epsilon < E$.

L'estimée de Minami (M) :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\#\{\sigma\left(H_\omega\left(\Lambda\right)\right) \cap J\} \geqslant 2\right) \leqslant C(|J||\Lambda|)^2/2a^2}$$

pour tout $J = [a, b] \subset (0, +\infty)$, et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$.

Remarque : (W) et (M) ne sont pas valables à l'énergie 0 (le bord inférieur du spectre presque sûr Σ).

Régime localisé

Régime localisé : L'endroit où le spectre de H_ω est purement ponctuel et les fonctions propres associées sont exp. déc. à l'infini.

Théorème [Aizemann, Schenker, Friedrich et Hundertmark]

(Loc) : Il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $p > 0$, il existe $q > 0$ et $L_0 > 0$ tels que, pour $L \geqslant L_0$, avec une prob. supérieure à $1 - L^{-p}$, si

- $\varphi_{n,\omega}$ est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda_L)$ associé à une valeur propre $E_{n,\omega}$ dans le régime localisé.
- $x_{n,\omega} \in \Lambda_L$ est un maximum de $x \mapsto |\varphi_{n,\omega}(x)|$ dans Λ_L,

Alors, pour $x \in \Lambda_L$, on a

$$\boxed{|\varphi_{n,\omega}(x)| \leqslant L^q e^{-\nu|x - x_{n,\omega}|}}$$

The point $x_{n,\omega}$ est appelé un centre de localisation de $\varphi_{n,\omega}$ ou $E_{n,\omega}$.

Régime localisé

Régime localisé : L'endroit où le spectre de H_ω est purement ponctuel et les fonctions propres associées sont exp. déc. à l'infini.

Théorème [Aizemann, Schenker, Friedrich et Hundertmark]

(Loc) : Il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $p > 0$, il existe $q > 0$ et $L_0 > 0$ tels que, pour $L \geqslant L_0$, avec une prob. supérieure à $1 - L^{-p}$, si

- $\varphi_{n,\omega}$ est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda_L)$ associé à une valeur propre $E_{n,\omega}$ dans le régime localisé.
- $x_{n,\omega} \in \Lambda_L$ est un maximum de $x \mapsto |\varphi_{n,\omega}(x)|$ dans Λ_L,

Alors, pour $x \in \Lambda_L$, on a

$$\boxed{|\varphi_{n,\omega}(x)| \leqslant L^q e^{-\nu|x-x_{n,\omega}|}}$$

The point $x_{n,\omega}$ est appelé un centre de localisation de $\varphi_{n,\omega}$ ou $E_{n,\omega}$.

Statistique locale des niveaux

Soit $\Lambda = [-L, L]$ un cube dans $\mathbb{Z}$ et E une énergie positive dans le régime localisé.

Supposons que $E_1(\omega, \Lambda) \leqslant E_2(\omega, \Lambda) \leqslant \cdots \leqslant E_{|\Lambda|}(\omega, \Lambda)$ sont les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$.

Niveaux renormalisés en E :

$$\boxed{\xi_n(E, \omega, \Lambda) = |\Lambda|\nu(E)(E_n(\omega, \Lambda) - E)}$$

Processus ponctuel :

$$\boxed{\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{\xi_n}(E, \omega, \Lambda)(\xi)}$$

Théorème [Germinet-Klopp, Miao]

- Soit E une énergie positive dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty, \Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) \rightharpoonup$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Statistique locale des niveaux

Soit $\Lambda = [-L, L]$ un cube dans $\mathbb{Z}$ et E une énergie positive dans le régime localisé.
Supposons que $E_1(\omega,\Lambda) \leqslant E_2(\omega,\Lambda) \leqslant \cdots \leqslant E_{|\Lambda|}(\omega,\Lambda)$ sont les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$.

Niveaux renormalisés en E :

$$\boxed{\xi_n(E,\omega,\Lambda) = |\Lambda|\nu(E)(E_n(\omega,\Lambda) - E)}$$

Processus ponctuel :

$$\boxed{\Sigma(\xi, E,\omega,\Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{\xi_n}(E,\omega,\Lambda)(\xi)}$$

Théorème [Germinet-Klopp, Miao]

- Soit E une énergie positive dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty, \Sigma(\xi, E,\omega,\Lambda) \rightharpoonup$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Statistique locale des niveaux

Soit $\Lambda = [-L, L]$ un cube dans $\mathbb{Z}$ et E une énergie positive dans le régime localisé.
Supposons que $E_1(\omega, \Lambda) \leqslant E_2(\omega, \Lambda) \leqslant \cdots \leqslant E_{|\Lambda|}(\omega, \Lambda)$ sont les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$.

Niveaux renormalisés en E :

$$\boxed{\xi_n(E, \omega, \Lambda) = |\Lambda| \nu(E)(E_n(\omega, \Lambda) - E)}$$

Processus ponctuel :

$$\boxed{\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{\xi_n}(E, \omega, \Lambda)(\xi)}$$

Théorème [Germinet-Klopp, Miao]

- Soit E une énergie positive dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty, \Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) \rightharpoonup$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Statistique locale des niveaux

Soit $\Lambda = [-L, L]$ un cube dans $\mathbb{Z}$ et E une énergie positive dans le régime localisé.
Supposons que $E_1(\omega, \Lambda) \leqslant E_2(\omega, \Lambda) \leqslant \cdots \leqslant E_{|\Lambda|}(\omega, \Lambda)$ sont les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$.

Niveaux renormalisés en E :

$$\boxed{\xi_n(E, \omega, \Lambda) = |\Lambda|\nu(E)(E_n(\omega, \Lambda) - E)}$$

Processus ponctuel :

$$\boxed{\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{\xi_n}(E, \omega, \Lambda)(\xi)}$$

Théorème [Germinet-Klopp, Miao]

- Soit E une énergie positive dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty, \Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) \rightharpoonup$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Statistique locale des niveaux (suite)

Considérons deux limites de $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda), \Sigma(\xi, E', \omega, \Lambda)$ pour $E \neq E'$.

- Sont-elles indépendantes ? C'est à dire, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les deux processus ci-dessus convergent-ils faiblement vers deux processus de Poisson indépendants ?
- Oui pour le modèle d'Anderson discret :

Théorème (*Pour le modèle d'Anderson*, [Klopp])

- Soient $E \neq E'$ dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$, $\nu(E') > 0$.
- Alors, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\begin{array}{ll} \#\{j; \xi_j(E,\omega,\Lambda) \in U_+\} & = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E',\omega,\Lambda) \in U_-\} & = k_- \end{array}\right\} \xrightarrow[\Lambda \to \mathbb{Z}]{} e^{-|U_+|}\frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_-|}\frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}}$$

- Ce théorème est une conséquence des estimées de décorrélation.

Statistique locale des niveaux (suite)

Considérons deux limites de $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda), \Sigma(\xi, E', \omega, \Lambda)$ pour $E \neq E'$.

- Sont-elles indépendantes ? C'est à dire, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les deux processus ci-dessus convergent-ils faiblement vers deux processus de Poisson indépendants ?
- Oui pour le modèle d'Anderson discret :

Théorème (*Pour le modèle d'Anderson*, [Klopp])

- Soient $E \neq E'$ dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$, $\nu(E') > 0$.
- Alors, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\begin{array}{ll} \#\{j; \xi_j(E,\omega,\Lambda) \in U_+\} & = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E',\omega,\Lambda) \in U_-\} & = k_- \end{array}\right\} \xrightarrow[\Lambda \to \mathbb{Z}]{} e^{-|U_+|} \frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_-|} \frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}}$$

- Ce théorème est une conséquence des estimées de décorrélation.

Statistique locale des niveaux (suite)

Considérons deux limites de $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda), \Sigma(\xi, E', \omega, \Lambda)$ pour $E \neq E'$.

- Sont-elles indépendantes ? C'est à dire, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les deux processus ci-dessus convergent-ils faiblement vers deux processus de Poisson indépendants ?
- Oui pour le modèle d'Anderson discret :

Théorème (*Pour le modèle d'Anderson,* [Klopp])

- Soient $E \neq E'$ dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$, $\nu(E') > 0$.
- Alors, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\begin{array}{ll} \#\{j; \xi_j(E,\omega,\Lambda) \in U_+\} & = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E',\omega,\Lambda) \in U_-\} & = k_- \end{array}\right\} \xrightarrow[\Lambda \to \mathbb{Z}]{} e^{-|U_+|}\frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_-|}\frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}}$$

- Ce théorème est une conséquence des estimées de décorrélation.

Statistique locale des niveaux (suite)

Considérons deux limites de $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda), \Sigma(\xi, E', \omega, \Lambda)$ pour $E \neq E'$.

- Sont-elles indépendantes ? C'est à dire, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les deux processus ci-dessus convergent-ils faiblement vers deux processus de Poisson indépendants ?
- Oui pour le modèle d'Anderson discret :

Théorème (*Pour le modèle d'Anderson*, [Klopp])

- Soient $E \neq E'$ dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$, $\nu(E') > 0$.
- Alors, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\begin{array}{ll} \#\{j; \xi_j(E, \omega, \Lambda) \in U_+\} & = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E', \omega, \Lambda) \in U_-\} & = k_- \end{array}\right\} \xrightarrow[\Lambda \to \mathbb{Z}]{} e^{-|U_+|} \frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_-|} \frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}}$$

- Ce théorème est une conséquence des estimées de décorrélation.

Résultats pour le modèle étudié

Estimée de décorrélation pour l'opérateur aléatoire avec désordre hors diagonal :

Théorème [P.]

- Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1/2,1)$ et $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé.
- Quand $\ell \approx L^\alpha$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\begin{Bmatrix}\sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E' + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset\end{Bmatrix}\right) \leqslant C(\ell/L)^2 e^{(\log L)^\beta}}$$

Indépendance asymptotique :

Théorème [P.]

- Soit $n \geqslant 2$, on considère $\{E_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans le régime localisé telle que $E_j > 0$, $E_j \neq E_k$ $\forall j \neq k$ et $\nu(E_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les processus $\{\Sigma(\xi, E_j, \omega, \Lambda)\}_{1 \leq j \leq n}$ convergent faiblement vers les processus de Poisson indépendants.

Résultats pour le modèle étudié

Estimée de décorrélation pour l'opérateur aléatoire avec désordre hors diagonal :

Théorème [P.]

- Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1/2,1)$ et $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé.
- Quand $\ell \approx L^\alpha$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\begin{Bmatrix} \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E' + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \end{Bmatrix}\right) \leqslant C(\ell/L)^2 e^{(\log L)^\beta}}$$

Indépendance asymptotique :

Théorème [P.]

- Soit $n \geqslant 2$, on considère $\{E_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans le régime localisé telle que $E_j > 0$, $E_j \neq E_k$ $\forall j \neq k$ et $\nu(E_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les processus $\{\Sigma(\xi, E_j, \omega, \Lambda)\}_{1 \leq j \leq n}$ convergent faiblement vers les processus de Poisson indépendants.

Résultats pour le modèle étudié

Estimée de décorrélation pour l'opérateur aléatoire avec désordre hors diagonal :

Théorème [P.]

- Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1/2,1)$ et $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé.
- Quand $\ell \approx L^\alpha$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\begin{Bmatrix} \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E' + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \end{Bmatrix}\right) \leqslant C(\ell/L)^2 e^{(\log L)^\beta}}$$

Indépendance asymptotique :

Théorème [P.]

- Soit $n \geqslant 2$, on considère $\{E_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans le régime localisé telle que $E_j > 0$, $E_j \neq E_k \; \forall j \neq k$ et $\nu(E_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les processus $\{\Sigma(\xi, E_j, \omega, \Lambda)\}_{1 \leq j \leq n}$ convergent faiblement vers les processus de Poisson indépendants.

Résultats pour le modèle étudié

Estimée de décorrélation pour l'opérateur aléatoire avec désordre hors diagonal :

Théorème [P.]

- Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1/2,1)$ et $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé.
- Quand $\ell \approx L^\alpha$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\begin{Bmatrix} \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E' + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \end{Bmatrix}\right) \leqslant C(\ell/L)^2 e^{(\log L)^\beta}}$$

Indépendance asymptotique :

Théorème [P.]

- Soit $n \geqslant 2$, on considère $\{E_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans le régime localisé telle que $E_j > 0$, $E_j \neq E_k$ $\forall j \neq k$ et $\nu(E_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les processus $\{\Sigma(\xi, E_j, \omega, \Lambda)\}_{1 \leq j \leq n}$ convergent faiblement vers les processus de Poisson indépendants.

Lemme-clé pour démontrer l'estimée de décorrélation

Lemme-clé

- Soient $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé et $\beta \in (1/2, 1)$.
- Supposons que $\mathbb{P}^*$ est la prob. de l'événement suivant (applé $(*)$) :
  Il existe deux valeurs propres simples de $H_\omega(\Lambda)$, disons $E(\omega), E'(\omega)$ t.q.

  $$\boxed{|E(\omega) - E| + |E'(\omega) - E'| \leqslant e^{-L^\beta}}$$

  et

  $$\boxed{\|\nabla_\omega E(\omega) - c^2 \nabla_\omega E'(\omega)\|_1 \leqslant e^{-L^\beta},\ c > 0}$$

- Alors,

  $$\boxed{\mathbb{P}^* \leqslant e^{-cL^{2\beta}}}$$

Preuve du lemme-clé

Soient $u := u(\omega)$ and $v := v(\omega)$ vecteurs propres normalisés associés à $E(\omega)$ et $E'(\omega)$.

$$\boxed{\partial_{\omega_n} E(\omega) = (u(n) - u(n+1))^2 =: |Tu(n)|^2 \text{ pour tout } n \in \Lambda}$$

où $T : \ell^2(\Lambda) \longrightarrow \ell^2(\Lambda)$ défini par

$$\boxed{Tu(n) = u(n) - u(n+1) \text{ avec } u \in \ell^2(\Lambda)}$$

Donc, si $\omega \in (*)$, on a

$$\boxed{e^{-L^\beta} \geqslant \sum_n |Tu(n) - cTv(n)||Tu(n) + cTv(n)|}$$

Alors, il existe une partition de $\Lambda = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ t.q.

- pour $n \in \mathcal{P}$, $|Tu(n) - cTv(n)| \leqslant e^{-L^\beta/2}$,
- pour $n \in \mathcal{Q}$, $|Tu(n) + cTv(n)| \leqslant e^{-L^\beta/2}$.

Preuve du lemme-clé

Soient $u := u(\omega)$ and $v := v(\omega)$ vecteurs propres normalisés associés à $E(\omega)$ et $E'(\omega)$.

$$\boxed{\partial_{\omega_n} E(\omega) = (u(n) - u(n+1))^2 =: |Tu(n)|^2 \text{ pour tout } n \in \Lambda}$$

où $T : \ell^2(\Lambda) \longrightarrow \ell^2(\Lambda)$ défini par

$$\boxed{Tu(n) = u(n) - u(n+1) \text{ avec } u \in \ell^2(\Lambda)}$$

Donc, si $\omega \in (*)$, on a

$$\boxed{e^{-L^\beta} \geqslant \sum_n |Tu(n) - cTv(n)||Tu(n) + cTv(n)|}$$

Alors, il existe une partition de $\Lambda = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ t.q.

- pour $n \in \mathcal{P}$, $|Tu(n) - cTv(n)| \leqslant e^{-L^\beta/2}$,
- pour $n \in \mathcal{Q}$, $|Tu(n) + cTv(n)| \leqslant e^{-L^\beta/2}$.

Preuve du lemme-clé

Soient $u := u(\omega)$ and $v := v(\omega)$ vecteurs propres normalisés associés à $E(\omega)$ et $E'(\omega)$.

$$\boxed{\partial_{\omega_{\boldsymbol{n}}} E(\omega) = (u(n) - u(n+1))^2 =: |Tu(n)|^2 \text{ pour tout } n \in \Lambda}$$

où $T : \ell^2(\Lambda) \longrightarrow \ell^2(\Lambda)$ défini par

$$\boxed{Tu(n) = u(n) - u(n+1) \text{ avec } u \in \ell^2(\Lambda)}$$

Donc, si $\omega \in (*)$, on a

$$\boxed{e^{-L^\beta} \geqslant \sum_n |Tu(n) - cTv(n)||Tu(n) + cTv(n)|}$$

Alors, il existe une partition de $\Lambda = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ t.q.

- pour $n \in \mathcal{P}$, $|Tu(n) - cTv(n)| \leqslant e^{-L^\beta/2}$,
- pour $n \in \mathcal{Q}$, $|Tu(n) + cTv(n)| \leqslant e^{-L^\beta/2}$.

Preuve du lemme-clé

Soient $u := u(\omega)$ and $v := v(\omega)$ vecteurs propres normalisés associés à $E(\omega)$ et $E'(\omega)$.

$$\boxed{\partial_{\omega_n} E(\omega) = (u(n) - u(n+1))^2 =: |Tu(n)|^2 \text{ pour tout } n \in \Lambda}$$

où $T : \ell^2(\Lambda) \longrightarrow \ell^2(\Lambda)$ défini par

$$\boxed{Tu(n) = u(n) - u(n+1) \text{ avec } u \in \ell^2(\Lambda)}$$

Donc, si $\omega \in (*)$, on a

$$\boxed{e^{-L^\beta} \geqslant \sum_n |Tu(n) - cTv(n)||Tu(n) + cTv(n)|}$$

Alors, il existe une partition de $\Lambda = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ t.q.

- pour $n \in \mathcal{P}, |Tu(n) - cTv(n)| \leqslant e^{-L^\beta/2}$,
- pour $n \in \mathcal{Q}$, $|Tu(n) + cTv(n)| \leqslant e^{-L^\beta/2}$.

Preuve du lemme-clé (suite)

"Lower bound" : Il existe un sous-intervalle $J \subset \Lambda$ de taille $O(L^{\beta})$ t.q.

$$\boxed{|u(n)|^2 + |u(n+1)|^2 \geqslant e^{-L^{\beta}/2} \text{ pour tout } n \in J}$$

Décomposition :

$$\boxed{\mathcal{P} \cap J = \cup \mathcal{P}_j \text{ et } \mathcal{Q} \cap J = \cup \mathcal{Q}_j}$$

où $\mathcal{P}_j$ et $\mathcal{Q}_j$ sont des intervalles dans $\mathbb{Z}$.

Preuve du lemme-clé (suite)

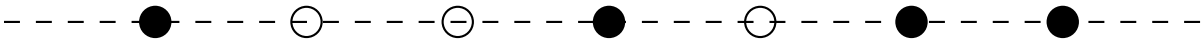
"Lower bound" : Il existe un sous-intervalle $J \subset \Lambda$ de taille $O(L^\beta)$ t.q.

$$\boxed{|u(n)|^2 + |u(n+1)|^2 \geqslant e^{-L^\beta/2} \text{ pour tout } n \in J}$$

Décomposition :

$$\boxed{\mathcal{P} \cap J = \cup \mathcal{P}_j \text{ et } \mathcal{Q} \cap J = \cup \mathcal{Q}_j}$$

où $\mathcal{P}_j$ et $\mathcal{Q}_j$ sont des intervalles dans $\mathbb{Z}$.



Trois étapes pour compléter la preuve du lemme-clé

Première étape : Chaque $\mathcal{P}_j$ ou $\mathcal{Q}_j$ ne peut contenir qu'au plus 4 points.

Deuxième étape : De 4 points consécutifs de J, on peut toujours former un système carré 10×10 des équations linéaires.

$$\boxed{AU = b \text{ où } \|b\| \leq c_0 e^{-L^\beta/2} \text{ et } \|U\| \geq e^{-L^\beta/4}}$$

où A est une matrice carrée de taille 10 et
$U := (u(n-2), \ldots, u(n+2), v(n-2), \ldots, v(n+2))^t$.

Observation :

$$\boxed{|\det A| \leq M e^{-L^\beta/4} \text{ où } M \text{ ne dépend que } \alpha_0, \beta_0, E \text{ et } E'}$$

Troisième étape : En utilisant d'un lemme de réduction + un calcul explicite, on déduit les restrictions sur v.a.'s ω_n.

Trois étapes pour compléter la preuve du lemme-clé

Première étape : Chaque $\mathcal{P}_j$ ou $\mathcal{Q}_j$ ne peut contenir qu'au plus 4 points.

Deuxième étape : De 4 points consécutifs de J, on peut toujours former un système carré 10×10 des équations linéaires.

$$\boxed{AU = b \text{ où } \|b\| \leq c_0 e^{-L^{\beta}/2} \text{ et } \|U\| \geq e^{-L^{\beta}/4}}$$

où A est une matrice carrée de taille 10 et
$U := (u(n-2), \ldots, u(n+2), v(n-2), \ldots, v(n+2))^t$.

Observation :

$$\boxed{|\det A| \leq Me^{-L^{\beta}/4} \text{ où } M \text{ ne dépend que } \alpha_0, \beta_0, E \text{ et } E'}$$

Troisième étape : En utilisant d'un lemme de réduction + un calcul explicite, on déduit les restrictions sur v.a.'s ω_n.

Trois étapes pour compléter la preuve du lemme-clé

Première étape : Chaque $\mathcal{P}_j$ ou $\mathcal{Q}_j$ ne peut contenir qu'au plus 4 points.

Deuxième étape : De 4 points consécutifs de J, on peut toujours former un système carré 10×10 des équations linéaires.

$$\boxed{AU = b \text{ où } \|b\| \leq c_0 e^{-L^\beta/2} \text{ et } \|U\| \geq e^{-L^\beta/4}}$$

où A est une matrice carrée de taille 10 et
$U := (u(n-2), \ldots, u(n+2), v(n-2), \ldots, v(n+2))^t$.

Observation :

$$\boxed{|\det A| \leq M e^{-L^\beta/4} \text{ où } M \text{ ne dépend que } \alpha_0, \beta_0, E \text{ et } E'}$$

Troisième étape : En utilisant d'un lemme de réduction + un calcul explicite, on déduit les restrictions sur v.a.'s ω_n.

Trois étapes pour compléter la preuve du lemme-clé

Première étape : Chaque $\mathcal{P}_j$ ou $\mathcal{Q}_j$ ne peut contenir qu'au plus 4 points.

Deuxième étape : De 4 points consécutifs de J, on peut toujours former un système carré 10×10 des équations linéaires.

$$\boxed{AU = b \text{ où } \|b\| \leq c_0 e^{-L^\beta/2} \text{ et } \|U\| \geq e^{-L^\beta/4}}$$

où A est une matrice carrée de taille 10 et
$U := (u(n-2), \ldots, u(n+2), v(n-2), \ldots, v(n+2))^t$.

Observation :

$$\boxed{|\det A| \leq M e^{-L^\beta/4} \text{ où } M \text{ ne dépend que } \alpha_0, \beta_0, E \text{ et } E'}$$

Troisième étape : En utilisant d'un lemme de réduction + un calcul explicite, on déduit les restrictions sur v.a.'s ω_n.

Fin de la preuve

Les restrictions sur v.a.'s $\{\omega_n\}_{n\in\Lambda}$:

(i) $$\left|\omega_n + \frac{E'-E}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/8},$$

(ii) $$\left|\omega_{n-1} + \frac{E'-E}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/8},$$

(iii) $$\left|\omega_{n-1}\omega_n - \frac{(E+E')^2}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/4}.$$

En conclusion,

- Les v.a.'s $\{\omega_j\}_{j\in\Lambda}$ satisfont au moins cL^β cond. de types (i)-(iii).
- Du fait que ω_n sont i.i.d. avec une densité bornée, (i)-(iii)$\Longrightarrow$ Pour chaque partition $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, l'événement $(*)$ se produit avec une prob. au plus $e^{-cL^{2\beta}}$.

Donc,

$$\boxed{\mathbb{P}^* \leqslant 2^L e^{-cL^{2\beta}} \leqslant e^{-\tilde{c}L^{2\beta}}}$$

ce qui conclut la preuve du lemme-clé.

Fin de la preuve

Les restrictions sur v.a.'s $\{\omega_n\}_{n\in\Lambda}$:

(i) $$\left|\omega_n + \frac{E'-E}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/8},$$

(ii) $$\left|\omega_{n-1} + \frac{E'-E}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/8},$$

(iii) $$\left|\omega_{n-1}\omega_n - \frac{(E+E')^2}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/4}.$$

En conclusion,

- Les v.a.'s $\{\omega_j\}_{j\in\Lambda}$ satisfont au moins cL^β cond. de types (i)-(iii).
- Du fait que ω_n sont i.i.d. avec une densité bornée, (i)-(iii)$\Longrightarrow$ Pour chaque partition $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, l'événement $(*)$ se produit avec une prob. au plus $e^{-cL^{2\beta}}$.

Donc,

$$\boxed{\mathbb{P}^* \leqslant 2^L e^{-cL^{2\beta}} \leqslant e^{-\tilde{c}L^{2\beta}}}$$

ce qui conclut la preuve du lemme-clé.

Fin de la preuve

Les restrictions sur v.a.'s $\{\omega_n\}_{n\in\Lambda}$:

(i) $\left|\omega_n + \frac{E'-E}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/8}$,

(ii) $\left|\omega_{n-1} + \frac{E'-E}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/8}$,

(iii) $\left|\omega_{n-1}\omega_n - \frac{(E+E')^2}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/4}$.

En conclusion,

- Les v.a.'s $\{\omega_j\}_{j\in\Lambda}$ satisfont au moins cL^β cond. de types (i)-(iii).
- Du fait que ω_n sont i.i.d. avec une densité bornée, (i)-(iii)$\Longrightarrow$ Pour chaque partition $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, l'événement $(*)$ se produit avec une prob. au plus $e^{-cL^{2\beta}}$.

Donc,

$$\boxed{\mathbb{P}^* \leqslant 2^L e^{-cL^{2\beta}} \leqslant e^{-\tilde{c}L^{2\beta}}}$$

ce qui conclut la preuve du lemme-clé.

Fin de la preuve

Les restrictions sur v.a.'s $\{\omega_n\}_{n\in\Lambda}$:

(i) $\left|\omega_n + \dfrac{E'-E}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/8}$,

(ii) $\left|\omega_{n-1} + \dfrac{E'-E}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/8}$,

(iii) $\left|\omega_{n-1}\omega_n - \dfrac{(E+E')^2}{4}\right| \leqslant Ce^{-L^\beta/4}$.

En conclusion,

- Les v.a.'s $\{\omega_j\}_{j\in\Lambda}$ satisfont au moins cL^β cond. de types (i)-(iii).
- Du fait que ω_n sont i.i.d. avec une densité bornée, (i)-(iii)$\Longrightarrow$ Pour chaque partition $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, l'événement $(*)$ se produit avec une prob. au plus $e^{-cL^{2\beta}}$.

Donc,

$$\boxed{\mathbb{P}^* \leqslant 2^L e^{-cL^{2\beta}} \leqslant e^{-\tilde{c}L^{2\beta}}}$$

ce qui conclut la preuve du lemme-clé.

Références

[1] Michael Aizenman, Jeffrey H.Schenker, Roland M. Friedrich, and Dirk Hundertmark. *Finite-volume fractional-moment criteria for Anderson localization*, Comm. Math. Phys., 224(1) :219-253, 2001. Dedicated to Joel L. Lebowitz.

[2] Dong Miao, *Eigenvalue statistics for lattice Hamiltonian of off-diagonal disorder* , J. Stat. Phys (2011), 143 : 509–522 DOI 10.1007/s10955-011-0190-2.

[3] Frédéric Klopp, *Decorrelation estimates for the eigenvalues of the discrete Anderson model in the localized regime*, Comm. Math. Phys. Vol. 303, pp. 233-260 (2011).

[4] Trinh Tuan Phong, *Decorrelation estimates for a 1D tight-binding model in the localized regime* (to appear in Annales Henri Poincaré).

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !