Institut Galilée
Dép. de Mathématiques
Licence sciences 1^{er} semestre.

2013-2014

Questions à préparer sur le chapitre 1

1. Tracer l'allure du graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$, puis en déduire le tracé du graphe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(2x)$.

2. Déterminer, sans utiliser la dérivation, le sens de variation de la fonction $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$.

3. Montrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ possède au moins trois solutions réelles.

4. Déterminer le domaine de définition D de l'expression $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. On définit alors une fonction $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
Etudier la dérivabilité de h sur D et calculer $h'(x)$ quand elle est définie.

5. Montrer que la fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

6. On rappelle que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$.
On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f et g sont continues en 0.
2. Etudier la dérivabilité à droite en 0 de f et g.
3. Etudier le sens de variation de f et g sur $\mathbb{R}^+$.
4. Tracer les graphes de f et g en respectant la position relative des deux graphes.

7. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x + \cos x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

où α et β sont des nombres réels.
Déterminer α et β de telle façon que φ soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

8. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer l'inégalité

$$e^b - e^a < (b - a)e^b$$

9. Montrer que la fonction $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ est concave. En déduire que pour tout x dans $]1, +\infty[$ on a $\ln(\ln x) \leq \frac{x}{e} - 1$.