Institut Galilée 2013-2014
Dép. de Mathématiques
Licence sciences 1^{er} semestre.

Questions à préparer sur le chapitre 2

1. Pour $x \in [0, 2\pi[$, résoudre les deux inéquations (i) et (ii) (graphiquement), et l'équation (iii) suivantes :

(i) $\cos x < \dfrac{1}{2}$, (ii) $\sin x \geq \sin\Big(-\dfrac{\pi}{6}\Big)$, (iii) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos 2x + \cos x$. Déterminer la valeur (exacte) mininimale prise par f.

3. A partir des formules d'addition des fonctions sin et cos, établissez les deux formules suivantes valides pour tout réel $x \neq \pi/2 + k\pi$,

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \text{et} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.$$

4. En étudiant sur $]-\pi/2, \pi/2[$ la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{\pi}{4} - \ln(\cos x)$, montrer que pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$e^{x+\frac{\pi}{4}} \geq \sqrt{2}.\cos x.$$

5. On considère les deux fonctions f et g suivantes :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*},\ x \longmapsto f(x) = e^{2x} + 2e^x,$
$g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) = \ln\Big(\sqrt{x+1} - 1\Big).$

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ g(f(x)) = x$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ f(g(x)) = x.$

6. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sqrt{2})^x$. Résoudre les équations suivantes,

$$\text{(i) } f(x) = 8 \quad \text{et} \quad \text{(ii) } f(f(x)) = 4$$

7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x.e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$.

1) Rappeler pourquoi on peut affirmer que $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1.$
2) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet au voisinage de $+\infty$ une droite D asymptote.