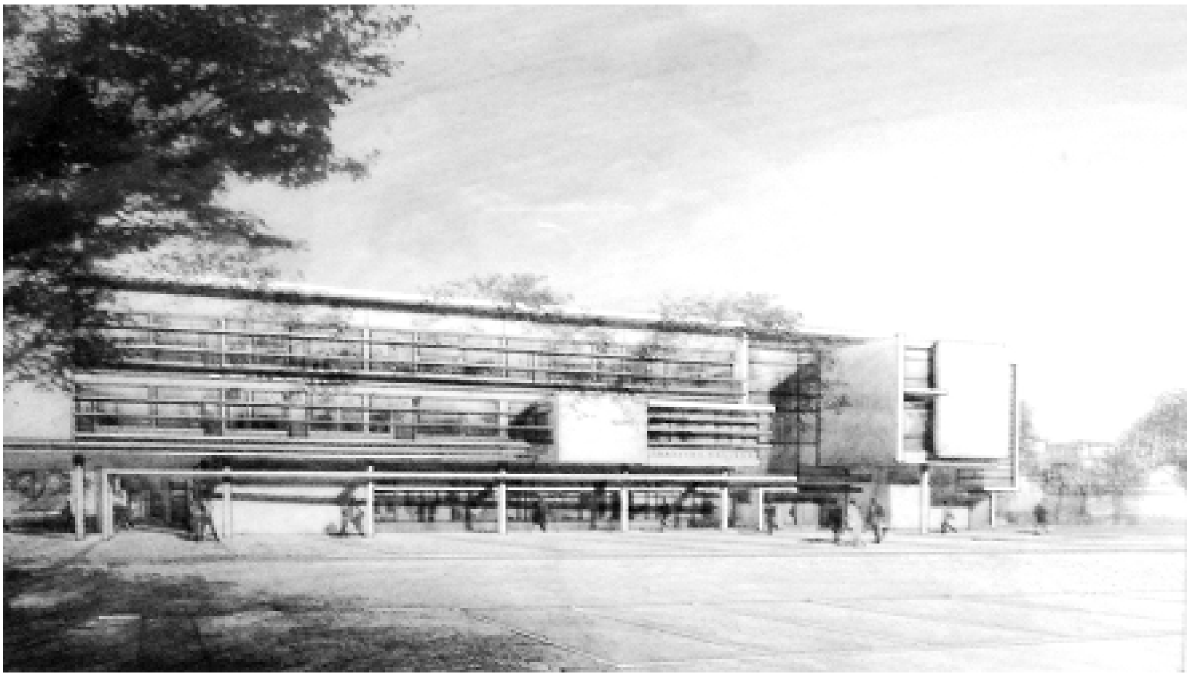
Institut Galilée

Sciences et technologies



Licence 1re année

Mathématiques pour les sciences

Premier semestre

Département de Mathématiques

www.math.univ-paris13.fr/depart

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions numériques

1 Concepts de base sur les fonctions numériques

L'objet de cette section est de préciser les éléments de base mais essentiels qui interviennent dans le corpus mathématique des *fonctions numériques*. Ce cours de première année a pour objectif la maitrise des fonctions de référence et des outils permettant l'étude d'une fonction numérique plus sophistiquée . Mais ce cours a aussi pour objectif de préciser, c'est-à-dire de définir clairement, les $\ll$ objets mathématiques $\gg$ concernés.

1.1 Notions d'Application

Commençons par un exemple. Considérons une expérience aléatoire dont les issues possibles sont les éléments de l'ensemble, univers des possibles de cette expérience et dont $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements de cette expérience. Une loi de probabilité sur Ω associe à tout élément A de $\mathcal{E}$, un nombre réel $p(A)$, probabilité de l'évènement A, avec $p(A) \in [0, 1]$:

$$p : \mathcal{E} \to [0, 1]$$

Ainsi $p \ll$ applique $\gg$ tout évènement A sur un nombre $p(A)$ de l'intervalle $[0, 1]$, ce nombre étant $\ll$ fonction $\gg$ de l'évènement A dont on parle. Les trois données constituées de l'ensemble des événements $\mathcal{E}$, l'ensemble $[0, 1]$ et l'association $p : \mathcal{E} \to [0, 1]$ c'est-à-dire la donnée pour tout $A \in \mathcal{E}$ du couple $(A, p(A)) \in \mathcal{E} \times [0, 1]$ définit une *application*. C'est la connaissance de l'ensemble des couples, $G = \{(A, p(A)), A \in \mathcal{E} \text{ et } p(A) \in [0, 1]\}$, qui permet de définir complètement l'association (ou correspondance) $p : \mathcal{E} \to [0, 1]$. Cet ensemble G est ce que l'on appelle le $\ll$ graphe $\gg$ de l'application p.

Définition 1.1.1 *Une application f est définie par les trois données suivantes :*
- un ensemble X, appelé ensemble de départ de f,
- un ensemble Y, appelé ensemble d'arrivée de f,
- une $\ll$ association (ou correspondance) $f : X \to Y$ $\gg$, qui associe à tout élément x de X un unique élément y de Y appelé image de x par f. Cette association est précisée par la donnée d'un ensemble $G_f \subset X \times Y = \{(x, y),\ x \in X \text{ et } y \in Y\}$, appelé graphe de f, vérifiant que pour tout $x \in X$, cet ensemble G_f possède un et un seul élément de la forme (x, y); l'élément $y \in Y$ intervenant dans le couple (x, y) est alors appelé l'image de x par f et est noté $f(x)$.
On dit alors que f est une application définie sur X à valeurs dans Y ou aussi que f est

une application de X vers Y, ce que l'on note $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ ou bien $f : X \to Y$ ou seulement f.

En utilisant la notation $f(x)$ pour l'image de x, le graphe G_f de l'application f devient :

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x,y),\ x \in X\ , y = f(x)\} \\ &= \{(x, f(x)),\ x \in X\}. \end{aligned} \tag{1.1.1.1}$$

Un élément x de X possède une et une seule image $f(x)$ dans Y. Si y est l'image d'un l'élément x de X par f, on dit que x est un antécédent de y par f. **L'ensemble des images** de tous les éléments de X est une certaine partie de Y (cela peut parfois être Y tout entier). On peut aussi dire que c'est l'ensemble des éléments de Y ayant au moins un antécédent par f. On l'appelle **l'image de** f, et on le note $f(X)$. En notation mathématique on a donc :

$$\begin{aligned} f(X) &= \{f(x) \mid x \in X\} \\ &= \{y \in Y \mid (\exists x \in X),\ y = f(x)\}. \end{aligned}$$

Plus généralement on peut définir l'image par f d'un sous-ensemble A de X, par :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \mid x \in A\} \\ &= \{y \in Y \mid (\exists x \in A),\ y = f(x)\}. \end{aligned}$$

Exemple et exercice Soit P le plan repéré, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Considérons l'application f de P dans $\mathbb{R}$ qui à un point $M(x,y)$ du plan associe sa distance à l'origine du repère, soit :

$$f :\ P\ \to\ \mathbb{R}\ ,\ \ M(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}.$$

L'image de $J(-1/2, \sqrt{3}/2)$ est 1 et tous les antécédents de 1 sont les points du cercle de centre O et de rayon 1. Seuls les réels positifs sont des images et l'image de f est donc $\mathbb{R}^+$: $f(P) = \mathbb{R}^+$. Si A est le disque de centre O et de rayon 2, on a $f(A) = [0, 2]$.
Déterminer l'image par l'application f de la courbe Γ suivante :

$$\Gamma = \{M(x,y) \in P,\ \ |x| \le 1 \text{ et } y = \sqrt{x+1}\}.$$

Exercice Soit P le plan repéré, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les applications de P dans P suivantes : s_1 la symétrie orthogonale d'axe (Ox), s_2 la symétrie orthogonale d'axe (Oy) et enfin s_3 la symétrie centrale de centre l'origine du repère O. Expliciter ces applications et tracer les images par ces trois applications du sous-ensemble A de P des points de la courbe de la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$, soit :

$$A = \{M(x,y) \in P,\ \ x \in \mathbb{R} \text{ et } y = x^2 - 4x + 3\}.$$

Donner l'équation des courbes de P, $s_1(A)$, $s_2(A)$ et $s_3(A)$ que l'on obtient.

1.1.2 Egalité de deux applications, restriction et prolongement

Une application étant définie par trois données, dès lors, deux applications f et g seront **égales**, ce que l'on note $f = g$, si et seulement si elles coincident sur ces trois données, en d'autres termes si elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivé et qu'elles ont un même graphe. En particulier si $f : A \to B$ et $g : A \to B$ ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée, on aura :

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in A, f(x) = g(x).$$

Par exemple, les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto |x|$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x^2}$ sont égales puisqu'elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et que, $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \sqrt{x^2}$.

Comme il vient d'être dit, deux applications qui n'ont pas les mêmes ensembles de départ ne peuvent être égales. Ceci dit, il y a certains cas où deux telles applications ne sont pas totalement ≪ étrangères ≫ . C'est le cas d'une **restriction** ou d'un **prolongement** d'une application $f : X \to Y$ donnée.

Une **restriction** de $f : X \to Y$ est obtenue lorsque l'on restreint la correspondance entre x et $f(x)$ aux seuls éléments d'un sous-ensemble A de X. On la note par $f|_A$ (lire ≪ f restreinte à A ≫) si l'on veut préciser la filiation. L'ensemble de départ considéré est donc A, l'ensemble d'arrivée est toujours Y et, pour tout $x \in A$, $f|_A(x) = f(x)$. Cette application s'appelle la **restriction de f à A** :

$$f|_A : A \to Y.$$

Par exemple, la restriction à $A = \mathbb{R}^-$ de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto |x|$ est l'application, $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto -x$. Pour le préciser on écrira $g = f|_{\mathbb{R}^-}$. Si g est une restriction de f, on dit aussi que f est un **prolongement** de g.

Pour terminer sur les ≪ filiations ≫ classiques possibles de deux applications, il y a aussi les cas où la différence a lieu aussi sur l'ensemble d'arrivée. Si $f : X \to Y$ est une application dont l'image $f(X)$ de X par f n'est pas tout l'ensemble Y (tous les éléments de Y ne sont donc pas des images par f), on obtient une nouvelle application h déduite de f par **réduction** de l'ensemble d'arrivé aux seules images et où pour tout x de X, $h(x) = f(x)$:

$$h : X \to f(X).$$

On dit alors que h est la **réduction** de f sur ces images. On a aussi le cas où l'ensemble de départ est d'abord restreint à un sous-ensemble A de X : $f|_A : A \to Y$ et où l'ensemble d'arrivée considéré est ensuite réduit aux images $f(A)$. Cette application est donc obtenue à partir de f par restriction à A et réduction aux images...

Exemple : Soient P le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \to P \tag{1.1.2.1}$$

qui à un nombre réel t associe le point M, intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi droite d'origine O et d'angle polaire t radian. On peut restreindre cette application à l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi/2]$ et se réduire à l'image $f(I)$ pour l'arrivée. $f(I)$ est l'ensemble $\mathcal{C}'$ des points de $\mathcal{C}$ d' abscisses positifs, ainsi l'application g obtenue

$$g : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathcal{C}', \tag{1.1.2.2}$$

l'est à partir de f par restriction à I et réduction aux images.

Exercice : Soient f et g les applications définies en (1.1.2.1) et (1.1.2.2) de l'exemple précédent.

1. Déterminer l'ensemble des antécédants par f puis par g du point $R(1/2, -\sqrt{3}/2)$, puis du point $S(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

2. Soit h l'application obtenue de f par restriction à $[0, \pi]$ et réduction aux images, expliciter h.

3. Que peut-on dire de $g|_{[0,\pi/2]}$ et $h|_{[0,\pi/2]}$?

1.1.3 Composition d'applications

Considérons 3 ensembles X, Y et Z, et deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.
A chaque élément $x \in X$ on peut associer l'élément z de Z défini par $z = g(f(x))$:

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g(f(x))$$

On a ainsi obtenu une application de X dans Z, notée $g \circ f$; on l'appelle la **composée** de f et de g,

$$g \circ f : X \to Z; \quad x \mapsto g(f(x)).$$

La composition $g \circ f$ existe si l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g. Sous les hypothèses ci-dessus l'application $f \circ g$ n'existe pas, sauf si $Z = X$, mais en général ces deux applications sont différentes. Des exemples sont donnés dans les deux exercices qui suivent.

Exemple Soit P le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Considérons les deux applications p_1 et p_2 (dites coordonnées) de P dans $\mathbb{R}$:

$$p_1 : P \to \mathbb{R}, \;\; M(x, y) \mapsto x, \;\; \text{et} \;\; p_2 : P \to \mathbb{R}, \;\; M(x, y) \mapsto y. \tag{1.1.3.1}$$

Avec l'application f définie en (1.1.2.1), les compositions $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ définissent les deux fonctions circulaires cosinus et sinus :

$$\cos = p_1 \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; t \mapsto \cos t, \;\; \text{et} \;\; \sin = p_2 \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; t \mapsto \sin t.$$

Exercices

1. Soit X l'ensemble des êtres humains. Définissons les deux applications m et p de X dans lui-même suivantes : $p(x)$ est le père de x et $m(x)$ est la mère de x. Que représente les applications $m \circ p$ et $p \circ m$, sont-elles égales ?

2. Considérons les deux applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$. Comparer $g \circ f$ et $f \circ g$. Soit maintenant $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$; comparer $f \circ h$ et $h \circ f$.

3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$. Donner deux applications f et g tel que l'on ait $h = g \circ f$.

1.2 Généralités sur les fonctions numériques

Une **fonction numérique** $f : X \to Y$ est une application dont l'ensemble de départ X et l'ensemble d'arrivée Y sont des parties de $\mathbb{R}$ ([1]). on dit aussi que f est une fonction **d'une variable réelle** à **valeurs réelles** ([2])

• Les fonctions polynômes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: du premier degré : $x \mapsto ax+b$, $(a \neq 0)$, du second degré $x \mapsto ax^2+bx+c$, $(a \neq 0)$ ou de degré n quelconque :

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0),$$

sont des fonctions numériques.

• Les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$... et plus généralement les fonctions d'expression une fraction rationnelle, $F(x) = P(x)/Q(x)$ c'est à dire le quotient de deux fonctions polynômes, d'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ et d'ensemble de départ l'ensemble de définition de l'expression $F(x)$, sont des fonctions numériques.

• Les fonctions trigonométriques sinus, cosinus, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions numériques.

• les fonctions exponentielle et logarithme : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$, $\ln : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions numériques.

• La fonction partie entière d'un réel $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto E(x)$ est encore un autre type de fonction numérique. Rappelons que pour un réel x, $E(x)$ est l'unique nombre entier tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$. Par exemple, la partie entière de $12,21$ est 12 et celle de $-0,17$ est -1.

• Une autre façon de se donner une fonction numérique est de la définir « par morceaux » , c'est à dire de définir $f(x)$ de plusieurs façons, suivant les valeurs de x. C'est la cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ suivantes (tracer leur représentation graphique) :

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 2 \\ x-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1.2.1 Représentation graphique d'une fonction numérique

La notion de graphe a été définie dans le cadre plus général des applications et est précisée en (1.1.1.1). Pour $f : X \to Y$ une fonction numérique, son graphe G_f est donc :

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x,y),\, x \in X\,, y = f(x)\} \\ &= \{(x, f(x)),\, x \in X\}. \end{aligned} \tag{1.2.1.1}$$

G_f est ici un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et a donc une représentation dans le plan repéré P (c'est-à-dire le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$).

[1] Puisque $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{R}$, on peut considérer les suites réelles comme des fonctions numériques. Ici, nous nous occuperons plutôt des fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ constituée d'une réunion d'intervalles, ouverts ou fermés, mais non réduits à un point.

[2] de la même manière, on parle de fonction à variable entière, à variable complexe, ou à plusieurs variables ... et à valeurs entières, complexes, vectorielles, etc.

Définition 1.2.2 *Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique. On appelle* **représentation graphique** *ou* **courbe représentative** *de f, l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points $M(x,y)$ du plan P (repéré) défini par*

$$\mathcal{C}_f = \{M(x,y) \in P \mid x \in X \text{ et } y = f(x)\}.$$

On peut encore dire que $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour tous les $x \in X$, soit :

$$\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) \in P \mid x \in X\}.$$

Par ailleurs, rappelons dans ce cadre les faits élémentaires suivants :

$$y \in Y \text{ est l'image de } x \in X \text{ par } f \text{ si et seulement si } M(x,y) \in \mathcal{C}_f,$$

et, pour $x \in X$, $\mathcal{C}_f$ ne contient qu'un seul point d'abscisse x, l'ordonnée y de ce point est l'image de x par f (par définition même de la notion de fonction...).

La représentation schématique de la courbe d'une fonction peut servir à mémoriser diverses propriétés de cette fonction. Il est essentiel de connaitre celles des fonctions usuelles.

Exercices

1. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Formuler en écriture mathématique le fait que f est une fonction paire, que f est une fonction impaire. Dans un repère orthonormé, à quelles propriétés de symétrie de la courbe de f correspondent les propriétés « f paire » et « f impaire » ?

2. Dans un repère orthonormé, donner l'allure des courbes des fonctions suivantes où l'on prendra soin de bien préciser les positions relatives de ces courbes :

$$\begin{aligned} &f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n,\ n \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ &g_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x} \\ &g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x} \\ &h_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \\ &h_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

3. Dans un repère orthonormé, donner les représentations graphiques des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$ suivantes :

   (a) $f_1 : x \mapsto x^2,\ x \in \mathbb{R}, \quad f_2 : x \mapsto x^2+1,\ x \in \mathbb{R}, \quad f_3 : x \mapsto (x+1)^2+1,\ x \in \mathbb{R},$

   (b) $g_1 : x \mapsto \sqrt{x},\ x \geq 0, \quad g_2 : x \mapsto \sqrt{-x},\ x \leq 0, \quad g_3 : x \mapsto \sqrt{1-x}+1,\ x \leq 1,$

   (c) $h_1 : x \mapsto 2x^2+2x-4,\ x \in \mathbb{R}, \qquad h_2 : x \mapsto |2x^2+2x-4|,\ x \in \mathbb{R},$

   (d) $E_1 : x \mapsto \frac{1}{10}E(10x),\ x \in [0,1] \qquad E_2 : x \mapsto 2E(\frac{x}{2}),\ x \in [-4,4].$

1.2.3 Domaine de définition d'une expression et fonction associée

De nombreuses expressions (formules, expressions fonctionnelles, ...) sont obtenues en utilisant les fonctions numériques de référence (ou usuelles). Ces dernières interviennent alors dans des sommes, des produits, des quotients et des compositions. Pour de nombreuses fonctions numériques, la définition des images est souvent donnée par une expression de ce type, comme par exemple pour la fonction suivante :

$$g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2 + \ln(x+1)}{\sin x + 3}. \tag{1.2.3.1}$$

Sur cet exemple, l'image y d'un élément x est donnée par la *formule* :

$$y = \frac{x^2 + \ln(x+1)}{\sin x + 3}. \tag{1.2.3.2}$$

Domaine de définition d'une expression $y = A(x)$**.** Soit $y = A(x)$ une expression exprimant un réel y au moyen d'un réel x, la partie D de $\mathbb{R}$, la plus grande possible, sur laquelle cette expression (ou association) est définie [3] est le **domaine de définition** de l'expression $y = A(x)$. La fonction d'ensemble de départ D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les images sont définies par cette expression est appelée **la fonction numérique associée à l'expression** $y = A(x)$.

Par exemple, le domaine de définition de l'expression $y = A(x)$ donnée en (1.2.3.2) est $D =]-1, +\infty[$ et la fonction numérique associée à cette expression est la fonction f :

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2 + \ln(x+1)}{\sin x + 3}.$$

Toute restriction de f sur un sous-ensemble de X de D donne aussi une fonction dont la donnée des images est définie avec l'expression $y = A(x)$. Par exemple pour $X = [0, +\infty[$, on aboutit à la fonction g dont nous sommes partie en (1.2.3.1).

Vocabulaire

• On utilisera souvent la terminologie ≪ soit f la fonction définie par $f(x) = ...$ ≫ , (où les points de suspension représentent une expression fonction de x), cela sous-entend que f est la fonction numérique associée à l'expression $y = f(x)$ c'est-à-dire que $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$, avec D le domaine de définition de l'expression de $y = f(x)$.

• La formulation ≪ soit f la fonction définie sur X par $f(x) = ...$ ≫ , sous-entend que X est un sous-ensemble de D, qu'il est l'ensemble de départ de f et que $\mathbb{R}$ est l'ensemble d'arrivée, soit que $f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$.

Exercice Trouver le domaine de définition des expressions $y = A(x)$ suivantes et pour chacunes d'elles donner deux fonctions d'association définie avec l'expession $y = A(x)$.

$$y = \sqrt{-x}, \quad y = \sqrt{x^2 - x - 2}, \quad y = \sqrt{x^2}, \quad y = (\sqrt{x})^2, \quad y = \ln(1-x^2), \quad y = \frac{x\ln(x-1)}{2\sin x - 1}.$$

[3] C'est à dire que pour chaque $x \in X$, l'expression $y = A(x)$ définit un et un seul réel y.

1.2.4 Composition de fonctions numériques

La composition a été définie dans le cadre plus général des applications. Rappelons que La composition $g \circ f$ de deux fonctions f et g existe si et seulement si l'ensemble d'arrivée de f est égal à l'ensemble de départ de g comme par exemple dans le cas suivant :

$$f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \ x \mapsto x^2 + 1, \quad \text{et} \quad g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto \ln(x).$$

dont la composition $g \circ f$ est la fonction h :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \ln(x^2 + 1).$$

Ceci dit, on fera attention de ne pas confondre une fonction définie par une composition de fonctions comme dans l'exemple ci dessus et une fonction définie par une expression faisant intervenir une composition. Donnons un exemple. Considérons les deux fonctions suivantes

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto 4 - x^2, \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \ x \mapsto \sqrt{x}.$$

Ces fonctions ne sont évidemment pas composables, mais elles permettent de définir une expression $y = g(f(x))$ (par exemple) et ainsi une fonction numérique associée à cette expession. Plus précicément $g(f(x))$ est définie dès lors que $f(x) \in \mathbb{R}^+$, ce qui a lieu pour $x \in [-2, 2]$. La fonction h associée à l'expression $y = g(f(x))$ est donc:

$$h : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto h(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Comme on l'a déjà dit, h n'est pas la composée des fonctions f et g. Par contre $h = g_1 \circ f_1$ où $f_1 : [-2, 2] \to \mathbb{R}^+, \ x \mapsto 4 - x^2$ et $g_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercices Pour les cas suivants, dire si la composition $g \circ f$ est possible. Si oui, expliciter cette composition. Si non, expliciter la fonction h associée à l'expression $y = g(f(x))$, puis exprimer h comme une composée $g_1 \circ f_1$.

1. $f :]1, +\infty[\to]0, +\infty[, \ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad$ et $\quad g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 + \ln x.$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \ x \mapsto x^2 + 1, \quad$ et $\quad g :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}^+, \ x \mapsto \sqrt{2 - x}.$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 - 6x + 8, \quad$ et $\quad g : \mathbb{R}_{|\{-2\}} \to \mathbb{R}^*, \ x \mapsto \dfrac{1}{x + 2}.$

1.2.5 Sens de variation d'une fonction numérique

Soit f une fonction numérique définie sur $X \subset \mathbb{R}$, I une partie de X. On rappelle que :

f est **croissante sur** I si et seulement si f conserve l'ordre des images de deux réels quelconques de I. Cela se traduit par l'énoncé mathématique :

$$\forall (x, x') \in I^2, \quad x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x').$$

Si on a la condition plus restrictive : $\forall (x, x') \in I^2 \quad x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$, on dit que f est **strictement croissante** sur I.

De même f est **décroissante** sur I si et seulement si f inverse l'ordre des images de deux réels quelconques de I. Soit

$$\forall\,(x,x')\in I^2,\quad x<x' \Longrightarrow f(x)\geq f(x').$$

et **strictement décroissante** sur I si

$$\forall\,(x,x')\in I^2,\quad x<x' \Longrightarrow f(x)> f(x').$$

• On dit que f est **monotone** sur I si f ne change pas de sens de variation sur I, c'est-à-dire si f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I, **strictement monotone** si elle est soit strictement croissante sur I ou soit strictement décroissante sur I.

• Enfin, on dit que deux fonctions ont **même sens de variation** si elles sont toutes les deux croissantes, ou toutes les deux décroissantes. Enfin on dit qu'elles ont des **sens opposés de variations** si l'une est croissante et l'autre décroissante.

Remarques

• Le fait que f soit croissante sur I peut encore se traduire de la façon suivante :

$$\forall\,(x,x')\in I^2,\quad x\neq x' \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\geq 0.$$

• Dire qu'une fonction n'est pas croissante, cela ne veut pas dire qu'elle est décroissante ! Autrement dit, toutes les fonctions ne sont pas monotones. Cela va sans dire, mais ça va encore mieux en le disant...

Proposition 1.2.6 Composition de fonctions monotones. *Soient f et g deux fonctions numériques monotones sur I pour f et sur $J=f(I)$ pour g.*

- *Si f et g ont même sens de variation (sur I pour f et sur J pour g), alors la composée $g\circ f$ est croissante sur I.*
- *Si f et g ont un sens opposé de variation (sur I pour f et sur J pour g), alors $g\circ f$ est décroissante sur I.*

On laisse au lecteur la démonstration (très facile) de ces affirmations.
On peut affiner cette proposition avec des fonctions strictement monotones et l'on aboutit alors à une compostion strictement croissante ou strictement décroissante suivant que f et g ont un sens identique ou opposé de variation.

Exercices

1. Quelles sont les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes ?
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ est-elle croissante sur $\mathbb{R}$? Est-elle strictement croissante ?
3. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=1/x$ est elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?
4. La fonction partie entière de x, $E : x\mapsto E(x)$, est-elle monotone ? strictement monotone ?

5. Ecrire des énoncés avec quantificateurs signifiant que
   (a) f n'est pas croissante sur I,
   (b) f n'est pas strictement monotone sur I,
   (c) f n'est pas monotone sur I.
6. Rappeler le sens de variation des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto e^{-x}$ et $f : x \mapsto x^2$. Déterminer, sans aucun calcul, le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de $h : x \mapsto e^{-x^2}$.

1.2.7 Opérations sur les fonctions numériques

Nous allons définir dans ce paragraphe ce qu'il faut entendre par la somme $f+g$, le produit $f.g$ et le quotient f/g de deux fonctions numériques $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$.
Un des premiers intérêts de ces opérations est qu'elles permettent des formulations simples d'énoncés sur les fonctions comme par exemple : la somme $f+g$ de deux fonctions définies et dérivable sur I est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.

Commençons par un exemple et reprenons celui de la fonction g de (1.2.3.1).

$$g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2 + \ln(x+1)}{\sin x + 3}. \tag{1.2.7.1}$$

Dans le dernier paragraphe, g avait été définie à partir de l'expression (1.2.3.2). Nous allons ici procéder de façon radicalement différente pour construire g. Partons des trois fonctions suivantes ayant même ensemble de départ que celui de g (l'arrivée doit toujours être $\mathbb{R}$...):

$$\begin{aligned} h &: [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \\ k &: [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x+1) \\ l &: [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x + 3. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $l(x) \neq 0$ et

$$g(x) = \frac{h(x) + k(x)}{l(x)}$$

Avec les définitions ci dessous, on peut alors écrire :

$$g = \frac{h+k}{l}$$

Définitions Soient deux fonctions numériques f_1 et f_2, d'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ et définies sur un même ensemble de départ X.
Somme : La correspondance qui pour $x \in X$ associe le nombre réel $f_1(x) + f_2(x)$ définit sur X une fonction numérique g appelée la somme de f_1 et f_2. On écrira alors $g = f_1 + f_2$.
Produit : La correspondance qui pour $x \in X$ associe le nombre réel $f_1(x).f_2(x)$ définit sur X une fonction numérique h appelée le produit de f_1 et f_2. On écrira alors $h = f_1.f_2$
Quotient : Pour une fonction f_2, telle que $\forall x \in X, f_2(x) \neq 0$, La correspondance qui pour $x \in X$ associe le nombre réel $f_1(x)/f_2(x)$ définie sur X une fonction numérique q appelée le quotient de f_1 et f_2. On écrira alors $q = f_1/f_2$.

Remarque : Il faut être attentif sur le fait que ces opérations ne sont définies que pour des fonctions ayant même ensemble de départ et ayant $\mathbb{R}$ pour ensemble d'arrivée. Il est souvent sous-entendu lorsque l'on parle d'une somme $h = f + g$ ou d'un produit $h = fg$ que les termes ou les facteurs f et g dont on parle à cette occasion sont des fonctions dont l'ensemble de départ est celui de la fonction h, même si ces dernières ont une expression qui est définie sur un ensemble plus grand.

Exercice : Soient $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de l'expression $y = f(x)g(x)$.
   Soit $h : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)$, définir h comme produit de deux fonctions que l'on explicitera (plusieurs choix sont possibles...).

2. Déterminer le domaine de définition E de l'expression $y = f(x)/g(x)$.
   Soit $k : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)/g(x)$, définir k comme quotient de deux fonctions que l'on explicitera .

Exercice : Opérations et sens de variation

1. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que les fonctions définies sur I, somme $f + g$ et produit fg sont croissantes sur I.

2. Soient maintenant f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ mais à valeurs dans $\mathbb{R}^-$. Montrer que la somme $f + g$ est toujours croissante sur I, mais que la fonction produit fg est décroissante sur I.

3. La somme de deux fonctions monotones est-elle toujours une fonction monotone ? Tracer pour $x \in [-2, 0]$ la courbe des fonctions $h : x \mapsto x + x^2$ et $k : x \mapsto x^2 + x^3$.

1.3 Continuité et théorème des valeurs intermédaires

Intuitivement, une fonction numérique définie sur un intervalle est continue sur ce dernier si on peut en dessiner la courbe représentative sans lever le crayon. Ceci dit, la notion mathématique de continuité d'une fonction numérique est beaucoup plus fine qu'il n'y parait et a pour origine la notion de *limite* que nous ne développerons pas ici. On donne la définition mathématique suivante :

Définition 1.3.1 (Continuité)
Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique, soient $a \in X$ et E un sous-ensemble de X.
On dit que f est continue en a lorsqu'on a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur E lorsqu'elle est continue en tout point $a \in E$.

Exemples

• La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
n'est pas continue en 0. Le "saut" en 0 est incompatible avec la continuité en ce point.

• La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$ est continue en 0.

• La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,
est continue en 0. Malgré la différence entre les deux formules qui définissent cette fonction, le « raccord » en 0 s'effectue de manière continue.

• La fonction partie entière $x \mapsto \mathrm{E}(x)$ est « discontinue » c'est-à-dire non continue sur tous les entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

• les fonctions : polynômes, racine carré, fractions rationnelles, sin, cos, exp, ln, sont continues sur l'ensemble de définition de leur expression.

On est très souvent amené à faire des opérations sur les fonctions. La proposition suivante montre que la continuité est préservée par les opérations classiques, nous l'admettrons ici, ces résutats sont obtenus avec ceux sur les limites (limite d'une somme, d'un produit, etc).

Proposition 1.3.2 *Si f et g sont deux fonctions numériques continues sur un même ensemble X, alors la somme $f + g$ et le produit fg sont des fonctions continues sur X. Si de plus, g ne s'annule pas sur X, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est également continu sur X.*

La continuité est aussi préservée par la composition.

Proposition 1.3.3 *Soit $g \circ f$ une composition de fonction numérique définie sur X et I un sous-ensemble de X. Si f est continue sur I et g est continue sur $J = f(I)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur I.*

Si, pour représenter une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, on ne doit pas lever le crayon entre les points de sa courbe de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, il peut être clair qu'alors toutes les ordonnées y comprises entre les deux nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont des ordonnées de points de la courbe et donc des images par f d'élements de $[a, b]$!

$(figure)$

C'est l'objet du théorème important des valeurs intermédiares ci-dessous. Ceci dit, ce résultat n'est pas trivial et a pour origine le fait fondamental que l'ensemble des nombres réeels $\mathbb{R}$ n'a pas de « trou» , ce que l'on peut traduire par le fait que la limite d'une suite convergente de nombres réels est un nombre réel, que l'on retrouve utilisé dans la preuve ci après. ([4])

Théorème 1.3.4 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.*

[4] L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire des nombre de la forme $\frac{p}{q}$ où$p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, ne permettent pas de mesurer toutes les longueurs existantes. Par exemple, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 (soit $\sqrt{2}$), ne peut se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. $\sqrt{2}$ est un irrationnel, le nombre 2 n'est donc pas le carré d'un nombre rationnel. Les grecs ont mis longtemps avant de l'accepter. Cela a mis en évidence l'existence d'un ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{Q}$, celui des nombres réels, $\mathbb{R}$, dont les positifs permettent de mesurer toutes les longueurs existantes...

Preuve : on peut supposer sans perte de généralité que $f(a) \leq f(b)$. Soit $k \in [f(a), f(b)]$. On va montrer que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution. On construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
$a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq k$ et on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ dans le cas contraire $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < k$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la différence $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes et ont donc une limite commune x_0 appartenant à $[a, b]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$. La fonction f étant continue sur $[a, b]$, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ tendent vers $f(x_0)$. Par passage à la limite dans l'inégalité on obtient $f(x_0) \leq k \leq f(x_0)$, et donc $f(x_0) = k$. □

Remarque : Si l'on sait en plus que $f(a) \neq f(b)$ alors un nombre réel k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ aura donc au moins un antécédent x dans $]a, b[$.

Remarque : La démonstration donne une méthode pratique de détermination d'une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = k$, dite « méthode de dichotomie » .

Le Théorème des valeurs intermédiaires admet la formulation équivalente suivante :

Théorème 1.3.5 (Théorème des valeurs intermédiaires) *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Preuve : Remarquons d'abord qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, dès que c et d sont dans E et que m est compris entre c et d alors $m \in E$.
Montrons d'abord que (1.3.4)⇒ (1.3.5). Soit f une fonction continue sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrons que $f(I)$ est un intervalle.
Si s et t sont dans $f(I)$, alors $s = f(c)$ et $t = f(d)$ pour au moins deux éléments c et d de I, si k est compris entre s et t, k est compris entre $f(c)$ et $f(d)$ alors, d'après le théorème (1.3.4), il existe x compris entre c et d donc dans I tel que $f(x) = k$, c'est à dire $k \in f(I)$ et donc$f(I)$ est un intervalle.
Réciproquement, montrons à présent que (1.3.5)⇒ (1.3.4). Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$, son image $f([a, b])$ est donc un intervalle qui contient $f(a)$ et $f(b)$, et tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est dans l'image $f([a, b])$ puisque c'est un intervalle. Il existe donc $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = k$. □

Exercices

1. Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$ et soit C_f la parabole représentant f dans repère orthomormé du plan.
   (a) A l'aide de la courbe C_f, déterminer $f(A)$, où $A = [-2, 4]$, (comparer avec l'intervalle $[f(-2), f(4)]$).
   (b) Calculer $f(-2)$, déterminer graphiquement $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-12, 0]\}$. Retrouver par le calcul cet ensemble S.
2. Soit f la fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x + 7$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions (étudier f).
   (b) Avec la méthode utilisée pour la preuve de (1.3.4), donner une approximation au dixième de celle qui est comprise entre les deux autres.

2 Dérivée d'une fonction

Sauf mention du contraire les fonctions numériques $f : X \longrightarrow Y$ de cette section ont pour ensemble de départ un sous-ensemble quelconque X de $\mathbb{R}$. Pour poursuivre il est à présent nécéssaire de distinguer les points (où les éléments) de X dits **intérieurs à** X et les points de X dits **du bord de** X.

• Un point x_0 de X est un point intérieur de X si x_0 est contenu dans un intervalle ouvert $]a,b[$ contenu dans X, (on a donc $x_0 \in \,]a,b[\, \subset X$).

• Un point x_0 de X est un point du bord de X si x_0 n'est pas un point intérieur à X et si x_0 est l'extrémité d'un intervalle fermé non réduit à un point contenu dans X.

Exemple : Soit $X =]-\infty, 3] \cup \{4\} \cup [5,6[$, alors l'ensemble des points intérieurs de X est : $]-\infty, 3[\cup]5,6[$ et l'ensemble des points du bord de X est $\{3,5\}$, (le point 4 n'est ni intérieur, ni sur le bord, il est « isolé » dans X).

2.1 Dérivabilité

Si la continuité représente une certaine forme de « régularité » des fonctions, la dérivabilité en est une version améliorée.

Définition 2.1.1 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction numérique et soit x_0 un point intérieur à X. On dit que f est dérivable au point x_0 lorsque la limite*

$$\lim_{\substack{x \to x_O \\ x \in X}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

existe et est finie que l'on note alors $f'(x_0)$, appelée le « nombre dérivé » de f au point x_0.

Remarque : On peut aussi poser $x = x_0 + h$, d'où $x - x_0 = h$, et on obtient pour l'expression de la limite précédente,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x_0 + h \in X}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \qquad (2.1.1.1)$$

Exemples : On voit facilement qu'une fonction constante est dérivable en tout point, sa dérivée étant égale à 0. On vérifiera que les fonctions d'expression $y = 3x$ et $y = x^2$ sont dérivables en 0, et qu'en revanche la fonction d'expession $y = |x|$ ne l'est pas, le changement soudain de direction en 0 empêche la dérivabilité en 0.

Remarque : Pour que le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admette une limite finie en x_0, il faut que le numérateur tende vers 0. Une fonction dérivable au point x_0 est donc nécessairement continue au point a. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ introduit plus haut .

Tangente à la courbe : Soient $f : X \to Y$ une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit x_0 un point intérieur à X et soit $]a, b[$ un intervalle de X contenant x_0. Pour $x \in]a, b[$ et $x \neq x_0$, considérons la droite D_x passant par les 2 points de $\mathcal{C}_f$, $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$. La pente de cette droite est égale au taux d'accroissement de f entre x_0 et x.
Si f est dérivable en x_0, alors quand x tend vers x_0, la pente de la droite D_x tend vers $f'(x_0)$. La droite "limite", passant par le point $M_0(x_0, f(x_0))$ et de pente $f'(x_0)$, est appelée la **tangente** à la courbe de f en ce point. Son équation est donc

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) .$$

Nombre dérivée à gauche, à droite. Pour les points x_0 du bord de X ou des points intérieurs particuliers de X, on ne peut qu'étudier la limite du taux de variation que d'un seul côté de x_0. Cela donne lieu à la définition suivante:

Définition 2.1.2 *Soient $f : X \to Y$ une fonction numérique et x_0 un point du bord gauche de X ou intérieur à X.*
On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
On note $f'_d(a)$ cette limite qu'on appelle la "dérivée à droite de f en x_0".

La notion de dérivée à gauche est définie de manière similaire point les points du bord droit de X ou intérieur à X.

Exemple Bien que non dérivable en 0 comme nous l'avons vu précédemment, la fonction définie par $f(x) = |x|$ est pourtant dérivable à droite et à gauche en 0, avec $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. Comme on le voit ici, le fait que f soit dérivable à droite et à gauche en un point n'entraîne pas la dérivabilité en ce point, on a néanmoins le résultat suivanté :

Proposition 2.1.3 *Soit x_0 un point intérieur à X, si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = l$ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.*

Cette propriété est souvent utile pour déterminer la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux, aux points de ≪ jonction ≫ des différentes définitions. Soit par exemple f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Au point 1, la fonction est continue, car elle tend vers 1 des deux côtés, mais elle admet aussi une dérivée à gauche, et une dérivée à droite, toutes les deux égales à 1 : la fonction f est donc dérivable au point 1, avec $f'(1) = 1$.
En revanche la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est continue au point 1, mais non dérivable, car sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche n'ont pas la même valeur. On dit dans ce cas que le graphe de g possède un **point anguleux** avec deux **demi-tangentes** de pente 1 (à gauche) et 2 (à droite).

2.2 Dérivabilité et opérations sur les fonctions

L'objet de ce paragraphe est d'établir les principaux résultats relatifs à la compatibilité de la dérivabilité avec les opérations définies sur les fonctions. Il est cependant nécessaire de débuter avec le résultat ≪ technique ≫ suivant.

Proposition 2.2.1 *Une fonction $f : X \to Y$ est dérivable en x_0, de nombre dérivé l en x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : h \to \varepsilon(h)$, définie sur un voisage de 0, tendant vers 0 pour $h \to 0$, telle que $\varepsilon(0) = 0$ et*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,(l + \varepsilon(h))\,. \tag{2.2.1.1}$$

Preuve Si f est dérivable en x_0, considérons la formule, vue plus haut,

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Posons alors, pour $h \neq 0$,

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

On a donc f dérivable en x_0 si et seulement si $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$ ($h \neq 0$). On peut alors prolonger par continuité la fonction $\varepsilon(h)$ en 0, en posant $\varepsilon(0) = 0$. Réciproquement, en utilisant (2.2.1.1) on voit que la limite du taux d'accroissement en x_0 existe, est finie et vaut l ainsi la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. □

Proposition 2.2.2 *Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0,et α un réel, les fonctions αf, $f + g$, fg et (si $g(x_0) \neq 0$) f/g sont dérivables en x_0 et :*

$$\begin{aligned}
(\alpha f)'(x_0) &= \alpha \cdot f'(x_0),\\
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0),\\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

Preuve Ces formules ont été vues dans l'enseignement secondaire. Montrons par exemple celle qui donne la dérivée d'un produit, en nous servant de la Proposition 2.2.1.
Appliquons la formule 2.2.1.1 aux fonctions f et g : il existe donc des fonctions $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$, tendant vers 0 quand $h \to 0$, telles

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,(f'(x_0) + \varepsilon_1(h)) \text{ et } g(x_0+h) = g(x_0) + h\,(g'(x_0) + \varepsilon_2(h))\,.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
f(x_0+h)\,g(x_0+h) =& f(x_0)\,g(x_0) + h\,\Big[f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)\\
&+ f(x_0)\,\varepsilon_2(h) + g(x_0)\,\varepsilon_1(h) + h\,(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))\,(g'(x_0) + \varepsilon_2(h))\Big].
\end{aligned}$$

En posant

$$\varepsilon_3(h) = f(x_0)\,\varepsilon_2(h) + g(x_0)\,\varepsilon_1(h) + h\,(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))\,(g'(x_0) + \varepsilon_2(h)),$$

cela s'écrit encore

$$f(x_0 + h)\,g(x_0 + h) = f(x_0)\,g(x_0) + h\left[f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0) + \varepsilon_3(h)\right],$$

et on constate que $\varepsilon_3(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Toujours d'après la Proposition 2.2.1, cela montre que $f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$ est bien la dérivée de fg en x_0. □

Dérivée d'une fonction composée

Proposition 2.2.3 *Si $f : X \to Y$ est une fonction dérivable au point x_0, et si la fonction $g : Y \to Z$ est dérivable au point $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0. Sa dérivée est donnée par*

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\,\cdot\,g'(f(x_0)).}$$

Preuve On utilise encore la proposition 2.2.1. Il existe donc des fonctions $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$, tendant vers 0 quand $h \to 0$, telles que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,\big(f'(x_0) + \varepsilon_1(h)\big)\ \ (1)\ \text{et}\ \ g(y_0 + k) = g(y_0) + k\,\big(g'(y_0) + \varepsilon_2(k)\big)\ \ (2),$$

en posant $y_0 = f(x_0)$. Alors

$$g(f(x_0 + h)) = g\left[y_0 + h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))\right],$$

soit, en posant $k = h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))$ dans la formule (2) ci-dessus,

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + h)) = g(y_0 + k) &= g(y_0) + k(g'(y_0) + \varepsilon_2(k) \\ &= g(y_0) + h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))[g'(y_0) + \varepsilon_2(h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))], \end{aligned}$$

ou encore

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + h[f'(x_0)g'(f(x_0)) + \varepsilon_3(h)],$$

où $\varepsilon_3(h)$ est une fonction (qu'on laisse au lecteur le soin de définir précisément) qui tend vers 0 quand $h \to 0$.En appliquant une nouvelle fois la Proposition 2.2.1, on obtient la conclusion cherchée. □

Exemple : Rappelons que les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$ ont respectivement pour nombre dérivée en un point x, $f'(x) = e^x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $g'(x) = 1/x$ (pour tout $x > 0$) — cela sera démontré dans le chapitre suivant.
Si $u : x \mapsto u(x)$ est dérivable en x_0, alors la fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ l'est également, sa dérivée en ce point est $f'(x_0) = u'(x_0)\,e^{u(x_0)}$.
Si de plus $u(x_0) > 0$ alors la fonction définie par $g(x) = \ln(u(x))$ est dérivable en x_0, de dérivée égale à $g'(x_0) = \dfrac{u'(x_0)}{u(x_0)}$.

2.3 Fonction dérivée

Définition 2.3.1 *On appelle* **domaine de dérivabilité** *d'une fonction* $f : X \to Y$ *l'ensemble des points où elle est dérivable. On le note* D'_f. *On appelle fonction dérivée de* f *la fonction , noté* f' *définie par,* $f' : D'_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$.

Exemple : Pour la fonction définie par $f(x) = |x|$, le domaine dérivabilité est $D'_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec $f'(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Pour la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, alors $D'_f = \mathbb{R}$ et $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Vocabulaire : Soit $fX \to Y$ et $]a,b[$ un intervalle ouvert contenu dans X. On dit que f est **dérivable sur** $]a,b[$ si $]a,b[$ est contenu dans le domaine de dérivabilité D'_f de f.

2.3.2 Dérivées succesices La fonction f' elle-même peut être dérivable en certains points : la dérivée de f', quand elle existe, est appeléé**dérivée seconde** de f et notée f''. La fonction f'' elle-même peut être dérivable, sa dérivée sera appelée dérivée troisième de f et notée f''', etc.
On définit ainsi par récurrence la notion de **dérivée n-ième**, ou **dérivée d'ordre** n, de f, notée $f^{(n)}$.On dit que f est dérivable n fois (en un point, sur un intervalle...) si au(x) point(s) concerné(s) les dérivées $f^{(k)}$ existent pour $k = 1, \ldots, n$.
Pour la cohérence de la notation, on convient que $f^{(0)} = f$.

Exercices

1. Calculer la dérivée n-ième de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x+1)$.

2. Calculer la dérivée n-ième de la fonction g définie par $g(x) = \sin x$.

3. On suppose que le produit $f.g$ est défini et que f et g admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n. Montrer que la dérivée d'ordre n du produit fg existe, sa valeur étant donnée par la formule suivante (*formule de Leibnitz*) :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots + C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}}$$

   (on procédera par récurrence sur n).

2.4 Théorème des Accroissements finis

Nous admettrons le résultat suivant qui est un cas particulier du Théorème des accroissements finis énoncé ensuite.

Théorème 2.4.1 (Théorème de Rolle) *Soit* $fX \to Y$ *une fonction numérique continue sur un intervalle fermé* $[a,b]$ *contenu dans* X*, et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a,b[$. *Si* $f(a) = f(b)$ *alors il existe un point* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Interprétation graphique Ce théorème peut s'interpréter ainsi pour la courbe d'une fonction dérivable : si deux points distincts A et B de la courbe ont même ordonnée, il existe entre A et B un point C de cette courbe dont la tangente est horizontale. Notons que dans ce cas la tangente en C est parallèle à la "corde" $[A, B]$. Cette propriété n'est pas réservée à la direction horizontale, comme le montre le théorème des accroissements finis :

Théorème 2.4.2 (Théorème des accroissements finis) *Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ contenu dans X, et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c)$ soit égal au taux d'accroissement de f entre a et b ; autrement dit tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interprétation graphique Ce théorème donne pour la courbe d'une fonction dérivable : pour deux points distincts A et B de cette courbe, il existe entre ces deux points un point C de la courbe dont la tangente est parallèle à la corde $[A, B]$.

Preuve du théorème Considérons les deux points situés sur la courbe de f, $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Soit $\varphi(x)$ la fonction qui donne l'écart vertical entre la courbe de f et la corde $[AB]$ aux points d'abscisse x. Cette fonction s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On vérifie que la fonction φ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle entre a et b (elle est continuesur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et elle s'annule en a et b). Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

donc $\varphi'(c) = 0$ ce qui équivaut à $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

L'inégalité suivante que l'on déduit aisément de l'égalité des accroissements finis est fort utile. La preuve est laissée à titre d'exercice.

Théorème 2.4.3 (Inégalité des accroissements finis) *Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I et soit $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$ on ait $|f'(t)| \leq M$. Alors pour tous $x, y \in I$, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$$

Exemple d'application La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, la fonction cosinus, vérifie $|\cos t| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin x - \sin 0| \leq 1 \cdot |x - 0|$, c'est-à-dire $|\sin x| \leq |x|$.

2.5 Utilisation de la dérivée à l'étude des fonctions

La dérivée, quand elle est disponible, offre un outil irremplaçable pour l'étude des fonctions. Commençons par donner un résultat très utile pour l'étude du comportement d'une fonction $f : X \to Y$ aux points du bord de X.

Proposition 2.5.1 - Limite de nombres dérivés, demi-tangente - *Soit $f : X \to Y$ continue sur intervalle$[x_0, b]$ contenu dans X et dérivable sur $]x_0, b[$.Si $f'(x)$ tend vers une limite à droite δ quand $x \underset{>}{\to} x_0$ alors f admet en x_0 une dérivée à droite égale à δ .*

Preuve - Exercice : En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x_0, x]$, montrer que f admet en x_0 une dérivée à droite égale à δ.

On a bien entendu un énoncé similaire si l'on considère un intervalle de la forme $[a, x_0]$ et la limite de $f'(x)$ à gauche en x_0. Cette proposition est très utilisée en pratique en particulier pour étudier les pentes des demi-tangentes aux extrémités. En voici deux exemples.

Exercices

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x$ si $x \in]0, 1[$, $f(x) = \exp(x - 1)$ si $x \geq 1$. Cette fonction est-elle continue en 1? dérivable en 1 ?

2. Représenter graphiquement au voisinage de 0^+, $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

Passons à présent à l'utilisation de la dérivée pour des points intérieurs à X et commençons par le cas des extremuns dits locaux.

Soient $f : X \to Y$ une fonction numérique, et x_0 un point intérieur à X. Rappelons que l'on dit que f admet en x_0 un **maximum local** (resp. un **minimum local**) si, pour un certain intervalle $I =]a, b[$ contenu dans X et contenant x_0, on a

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \forall x \in I \quad f(x) \geq f(x_0)) \ .$$

Dans chacun des deux cas on dit que le point x_0 est un **extremum local** pour f. Si on remplace les inégalités $\leq$ et $\geq$ par des inégalités strictes pour $x \neq x_0$, on obtient les notions de extremun local **strict** . Attention, on ne parle d'extremum local en x_0 que si x_0 est à *l'intérieur* de X . Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$, atteint sa valeur minimale en 0, on ne dit pas pour autant que 0 est un minimum local pour f.

Remarque : La définition, par exemple, d'un maximum local implique que $f(x_0)$ est le maximum des valeurs prises par f *sur l'intervalle I considéré*, mais pas forcément le maximum de *toutes* les valeurs prises par f. La fonction définie par $f(x) = x^3 - x$ possède en $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ un maximum local, alors que f prend parailleurs des valeurs bien plus grandes que $f(x_0)$ puisque $f(x) \to +\infty$ quand$x \to +\infty$.

Proposition 2.5.2 *Si x_0 est un extremum local de f et si f est dérivable en x_0, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.*

Preuve Traitons le cas d'un maximum local. D'après les hypothèses, il existe un intervalle tel que $f$soit définie sur $]a, b[$ contenu dans X et contanant x_0, tel que

$$\forall x \in]a, b[\quad f(x) \leq f(x_0).$$

Il en résulte que si $x \in]a, x_0[$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est positif ou nul,donc sa limite quand $x \underset{<}{\rightarrow} x_0$ est positive ou nulle : autrement dit $f'_g(x_0) \geq 0$.

D'autre part si $x \in]x_0, b[$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est négatif ou nul,donc sa limite quand $x \underset{>}{\rightarrow} x_0$ est négative ou nulle : autrement dit $f'_d(x_0) \leq 0$.
Mais comme f est dérivable en x_0, $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$ et cette valeur ne peut qu'être égale à 0.Le cas d'un minimum local se traite de façon similaire. □

Remarques

1. La réciproque est fausse, c'est à dire qu'une fonction peut posséder une dérivée nulle en un point sansprésenter d'extremum local. Penser à l'exemple déjà évoqué de la fonction $f(x) = x^3$ en 0.

2. La proposition est évidemment fausse si f n'est pas dérivable en x_0 : ainsi la fonction définie par $f(x) = |x|$ admet unminimum local en 0, mais sa dérivée ne s'annule pas en 0 puisque en ce point la fonction n'est pas dérivable !

Donnons à présent le résultat principal et fondamental sur l'utilisation de la fonction dérivée pour l'étude d'une fonction (dérivable) :

Théorème 2.5.3 *Soit $f : X \to Y$ une fonction continue sur un intervalle I contenu dans X et d'extrémités a et b, $a < b$ (a ou b pouvant être égal à $+\infty$ ou $-\infty$) et dérivable sur $]a, b[$:*
- Si f' est positive (resp. négative) sur $]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Preuve : Soient x et y dans I vérifiant $x < y$, on peut appliquer le théorème des accroissementsfinis sur l'intervalle $[x, y]$ pour obtenir l'existence d'un point $c \in]x, y[$, tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Ainsi, si $f'(c) \geq 0$, alors $f(y) \geq f(x)$. Bien sûr si $f'(c) > 0$, alors $f(y) > f(x)$.
Le cas décroissant se traite de la même manière. □

Remarque : Le théorème est valable quelle que soit la nature de l'intervalle (ouvert, fermé, semi-ouvert...). Mais, on fera très attention au fait que ce théorème n'est valable que sur unintervalle, comme le montre l'exemple classique suivant. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de fonction dérivée $f(x) = -1/x^2$ qui est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction n'est pourtant pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque : Il n'est pas nécessaire que f' soit strictement positive sur $]a,b[$, pour que f soit strictement croissante sur $[a,b]$, il suffit par exemple que f' soit strictement positive sur $]a,b[$ sauf peut-être en un nombre fini de points comme on peut le voir par exemple avec la fonction $x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[-1,1]$:
Cette fonction est strictement croissante bien que $f'(0) = 0$. En effet, il suffit ici d'appliquer le théorème précédent sur l'intervalle $[-1,0]$ puis sur l'intervalle $[0,1]$. Ainsi, on obtient la stricte croissance sur ces deux intervalles mais on obtient également que si $x < 0$, alors $f(x) < f(0)$ et que si $y > 0$, alors $f(0) < f(y)$, on peut donc conclure que f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1,1]$ tout entier.

Corollaire 2.5.4 *Si $f X \longrightarrow Y$ est dérivable sur un intervalle ouvert I contenu dans X et de dérivée nulle sur I, alors f est constante sur cet intervalle.*

Preuve : on utilise le théorème précédent et on en déduit que notre fonction est à la fois croissante et décroissante, c'est à dire constante.

Remarque : On fera encore attention au fait que ce résultat n'est valable que sur un intervalle, comme le montre l'exemple suivant: la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui vaut 0 sur $]-\infty, 0[$ et 1 sur $]0, +\infty[$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée nulle. Cette fonction n'est pourtant pas constante puisqu'elle prend deux valeurs !

2.6 Convexité et dérivée seconde

Définition 2.6.1 *Soit $[a,b] \subset E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur E. On dit que f est <u>convexe</u> sur $[a,b]$ ou encore de " concavité tournée vers les y positifs" sur $[a,b]$, si pour tout couple (M_1, M_2) de points de la courbe de f d'abscisses dans $[a,b]$, le segment $[M_1, M_2]$ (on dit aussi la "corde" $[M_1, M_2]$) est situé au dessus de la courbe. Soit,*

$$\boxed{\forall t \in [0,1], \ \forall (x_1, x_2) \in [a,b]^2, \quad f[x_1 + t(x_2 - x_1)] \leqslant f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)]}$$

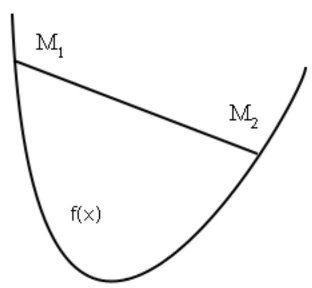


Figure 1.1: Une courbe convexe et une corde

De même, on dit que f est <u>concave</u> sur $[a,b]$ ou encore de "concavité tournée vers les y négatifs " sur $[a,b]$, si pour tout couple (M_1, M_2) de points de la courbe de f d'abscisses dans $[a,b]$, le segment $[M_1, M_2]$ est situé au dessous de la courbe.

Tout comme le signe de la dérivée f' donne des indications sur le sens de variation d'une fonction dérivable f, le signe de la dérivée seconde $f'' = (f')'$ si elle existe, nous renseigne sur la convexité de f.

Théorème 2.6.2 *Si f admet une dérivée seconde f'' partout positive ou nulle sur $[a, b]$, alors f est convexe sur $[a, b]$.*

Preuve : Soient x_1 et x_2 les abscisses des points M_1 et M_2 et soit $y = mx + p$ l'équation de la droite (M_1M_2). La quantité $\varphi(x) = f(x) - (mx + p)$ mesurant la différence des ordonnées d'un point de la courbe et d'un point de la droite de même abscisse x, vérifie:

$$\varphi'(x) = f'(x) - m \text{ donc } \varphi''(x) = f''(x) \geq 0.$$

φ' est donc croissante sur $[a, b]$. D'autre part puisque $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $\varphi'(c) = 0$ (Th de Rolle). Ainsi $\varphi'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [x_1, c]$ et $\varphi'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [c, x_2]$, et donc φ est décroissante sur $[x_1, c]$ et croissante sur $[c, x_2]$.
Finalement $\varphi(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, ce qui signifie bien que la corde $[M_1, M_2]$ est située au-dessus de la courbe

x	x_1		c		x_2
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Théorème 2.6.3 *Si f admet une dérivée seconde f'' partout positive ou nulle sur $[a, b]$, alors pour tout $x_0 \in [a, b]$, la courbe représentative de f est, sur l'intervalle $[a, b]$, au dessus de la tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$.*

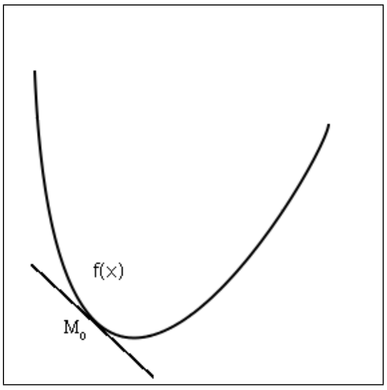


FIGURE 1.2: Une courbe convexe et une tangente

Preuve : Soit $t(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ l'équation de la tangente en M_0 et $h(x) = f(x) - t(x)$ la fonction mesurant la différence des ordonnées entre un point de la courbe et un point de cette tangente, de même abscisse x. On a pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \text{et} \quad h''(x) = f''(x) \geq 0 \ .$$

Par conséquent, la fonction h' est croissante, et comme $h'(x_0) = 0$, on a $h'(x) < 0$ si $x < x_0$, et $h'(x) > 0$, si $x > x_0$. La fonction h est décroissante sur $[a, x_0]$, et croissante sur $[x_0, b]$; elle admet donc son minimum en x_0, et comme $h(x_0) = 0$, on a $h(x) \geq 0$ pour tout x dans $[a, b]$.

Remarque. En considérant des dérivées secondes négatives, on obtient des résultats analogues aux théorèmes 2.6.2 et 2.6.3 mais en termes de concavité.

Exercices Illustrer graphiquement et montrer les résultats suivants :

1. Pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

2. Pour tout x réel on a $e^x \geq 1 + x$.

3. Pour tout x dans $]0, +\infty[$ on a $\ln x \leq x - 1$.

3 Exercices

3.1 Pour chacune des fonctions f suivantes déterminer : l'image de f, $f(A)$ et l'ensemble des antécedants de B pour $A =]-1, 3]$ et $B = [-2, 4[$.

- f définie par $f(x) = 1 - 2x$,
- h définie par $h(x) = -x^2 + 6x - 5$,
- g définie par $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$,
- h définie par $h(x) = \ln(x + 1)$.

3.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $|x| \geq 1$, $f(x) = -x$ si $|x| < 1$. Dessiner le graphe de f. Calculer $f \circ f$.

3.3 Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. En déduire le tracé des graphes des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{x} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+2} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} - 1 \end{array}$$

puis des fonctions :

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{-x+2} \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2x} - 1 \end{array}$$

3.4 On considère l'expression polynômiale du second degré $P(x) = -x^2 + 2x + 1$.
1) Mettre $P(x)$ sous forme canonique.
2) Donner les racines de l'équation $P(x) = 0$.
3) Tracer le graphe de la fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie, puis celui de la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |P(x)|$.

3.5 Dans un même repère othonormé du plan, donner les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x},\ x \in [0,4] \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{4}E(4x)},\ x \in [0,4].$$

3.6 Déterminer le domaine de définition de l'expression $A(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$.

3.7 Donner le domaine de définition des expressions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \ln(1 - 2x^2), \quad h(x) = \frac{x+1}{x^3 - 2x}.$$

3.8 1) Déterminer le domaine de définition D de l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{3t^2 + t - 1}}$.
On définie ainsi une fonction $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ par $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3t^2 + t - 1}}$.
2) Ecrire h comme la composée de deux fonctions u et v. Donner plusieurs réponses possibles. Ecrire à chaque fois u ou v comme la composée de deux autres fonctions.

3.9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
1) Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2) Calculer $f \circ f(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et simplifier au maximum l'expression obtenue.
3) Transformer l'expression $f(x)$ en une expression égale où x n'apparaît qu'une fois.

3.10 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + \exp(x)}$ est impaire et croissante.

3.11 Déterminer, sans utiliser la dérivation, le sens de variation des fonctions suivantes :

$$g_1 : \begin{array}{ccc} [-3/2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2x+3} \end{array} \qquad g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+2} \end{array} \qquad g_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\dfrac{1}{x}) \end{array}$$

3.12 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.
Etudier le sens de variation de f (sans utiliser la dérivation).
Indication : on pourra d'abord transformer l'expression $f(x)$, en distinguant les cas $x \leq 0$ et $x \geq 0$.

3.13 Soient les expressions numériques réelles $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1-x}$. Donner le domaine de définition de f et de g, et leurs images respectives. Expliciter le s fonction h et k définies par les expressions $h(x) = f(g(x))$ et $k(x) = g(f(x))$. Donner l'image de h et l'image de k.

3.14 Soit f la restriction de la fonction cos à $[0, 2\pi]$. Tracer le graphe de f, et utilisez-le pour répondre aux questions suivantes :

- Quelle est l'image par f des intervalles suivants :

$$]0, \pi[, \quad]0, 2\pi[, \quad [0, \pi/3], \quad]\pi/3, 4\pi/3].$$

- Déterminer les ensembles suivants :

$$A = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \geq 1\},$$
$$B = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) > 0\},$$
$$C = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) = 1/2\},$$
$$D = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \geq 1/2\}.$$

3.15 Déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Déterminer ensuite, sans calculs supplémentaires, le sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}^-$ de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

3.16 Etudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f_1(0) = 0$
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f_2(0) = 0$
3. $f_3(x) = xE(x)$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x)

3.17 Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3.18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Calculer $f(x_n)$ pour $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ puis, $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la fonction f n'est pas continue en 0.

3.19 Soit f une fonction de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ qui vérifie, pour tous $x \neq x'$,

$$\left|f(x) - f(x')\right| < \left|x - x'\right|.$$

1) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $[0,1]$ (on étudiera la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et on pensera à utiliser le Théorème des valeurs intermédiaires).

3.20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f s'annule au moins une fois.
Appliquer ce résultat aux polynômes de degré impair.

3.21 Soit f la fonction numérique définie sur $[0,1] \cup]2,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2} + \ln x & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

1) Déterminer l'équation du segment de droite prolongeant f en une fonction continue g sur $[0,+\infty[$. Plus précisemment, chercher les valeurs des quantités a et b telles que la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ coïncidant avec f sur$[0,1] \cup]2,+\infty[$ et valant $g(x) = ax + b$ pour $x \in]1,2]$ soit continue sur son ensemble de départ.
2) Calculer les dérivées à droite et à gauche de g pour $x = 1$ et $x = 2$. La fonction est-elle dérivable en ces points ?

3.22 Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$. Est-elle dérivable à droite en -1 ? Est-elle dérivable à gauche en 1 ? Est-elle dérivable sur $]-1,1[$? Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3.23 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ peut être prolongée par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée. Montrer ensuite que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

3.24 Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$, montrer à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} < \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3.25 En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ entre 0 et x, montrer que pour tout $x > -1$, on a

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

3.26 Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x(e-1).$$