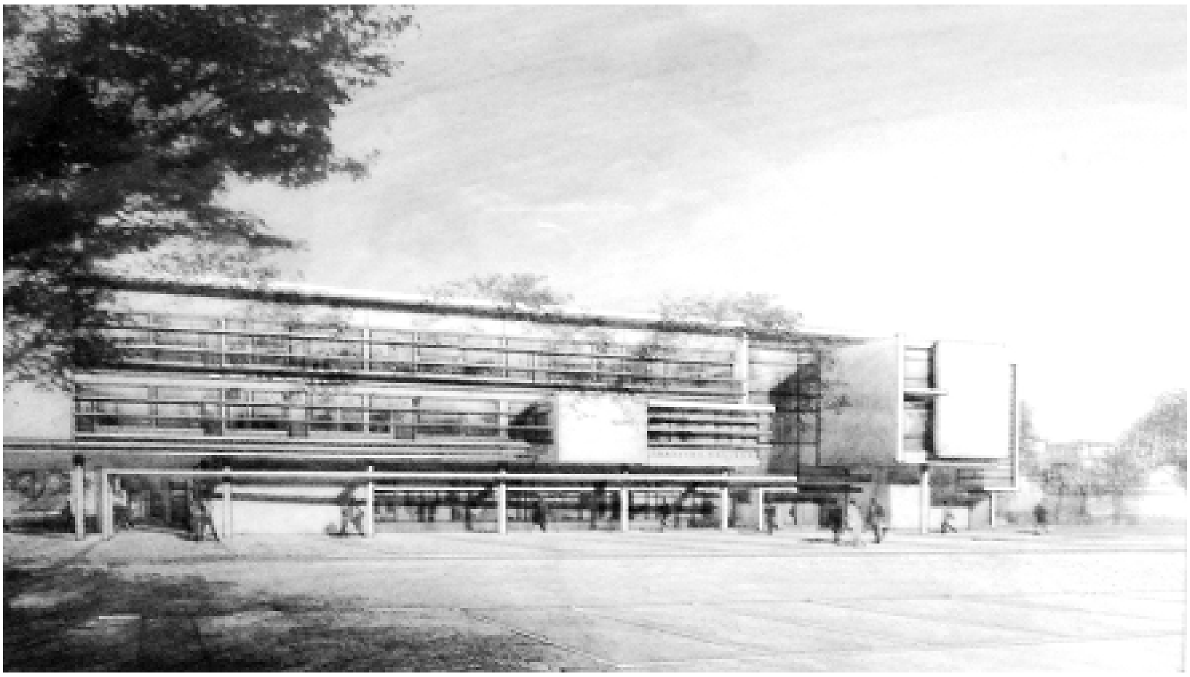
Institut Galilée

Sciences et technologies



Licence 1re année

Mathématiques pour les sciences

Premier semestre

Département de Mathématiques

www.math.univ-paris13.fr/depart

Table des matières

Chapitre 2

Les premières fonctions de référence

1 Les fonctions trigonométriques d'une variable réelle

Dans toute la suite de cette section, le plan P est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Les cercles de P sont orientés, positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le cercle $\mathcal{C}$ orienté de centre O et de rayon 1 est appelé le cercle trigonométrique. Le plan repéré muni du cercle trigonométrique est appelé le plan ≪ complexe ≫ , que l'on désigne à nouveau par la lettre P.

La définition et l'étude des fonctions sinus, cosinus et tangente d'une variable réelle sont fondées ici sur la notion intuitive de longueur orientée d'un arc de cercle où de façon équivalente sur la notion intuitive d'angle orienté. Rappelons que pour deux demi-droites de même origine, $[CA)$ et $[CB)$ du plan complexe, une mesure en radian de **l'angle orienté** $(\widehat{CA, CB})$ représenté par ces deux demi-droites est donnée par la longueur orientée d'un arc de cercle de centre C, de rayon 1 et ayant ces deux extrémités sur chacune des demi-droites $[CA)$ et $[CB)$. Si θ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{CA, CB})$ toutes les autres mesures de cet angle sont $\theta + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, suivant le nombre de tours de cercle pris pour l'arc de cercle considéré.

Enfin, pour une demi-droite $[OB)$ d'origine l'origine du repère, **l'angle polaire** de cette demi droite est l'angle orienté (OA, OB) où A est le point de coordonnées $(1, 0)$. En d'autres termes l'angle polaire de la demi-droite $[OB)$ est l'angle orienté représenté par la demi-droite de l'axe des abscisses positifs et la demi droite $[OB)$.

1.1 Définitions des fonctions sinus, cosinus et tangente

1.1.1 Définition des fonctions sinus et cosinus

Considérons à nouveau l'application $f : \mathbb{R} \to P$ définie au chapitre **1**, en (1.1.2.1). Pour simplifier les écritures et en utiliser une plus signifiante, nous la noterons à présent M :

$$M : \mathbb{R} \to P;\ \theta \mapsto M(\theta) \tag{1.1.1.1}$$

l'image d'un nombre réel θ est donc le point $M(\theta)$, intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite d'origine O et d'angle polaire de mesure θ radian. Autrement dit, le point $M(\theta)$ est la

seconde extrémité de l'arc de cercle de $\mathcal{C}$ d'origine $A(1,0)$ obtenu de la façon suivante :
- Si $\theta \geq 0$, on reporte sur $\mathcal{C}$ à partir du point $A(1,0)$, dans le sens positif un arc de cercle de longueur θ.
- Si $\theta < 0$, on reporte sur $\mathcal{C}$ à partir du point $A(1,0)$, dans le sens négatif un arc de cercle de longueur $|\theta|$.

Par définition :

- le cosinus de θ, noté $\cos\theta$, est l'abscisse du point $M(\theta)$,
- le sinus de θ, noté $\sin\theta$, est l'ordonnée du point $M(\theta)$.

De façon plus formalisée et en considérant les applications « coordonnées » $p_1 : P \to \mathbb{R}$ et $p_2 : P \to \mathbb{R}$ définies au chapitre **1** en (1.1.3.1), on a pour tout nombre réel θ ,

$$\cos\theta = p_1(M(\theta)) \quad \text{et} \quad \sin\theta = p_2(M(\theta)).$$

les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x \quad \text{et} \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$$

1.1.2 Définition de la fonction tangente

Il y a plusieurs façons d'aborder la fonction tangente (noté tan). Pour un nombre réel θ, le nombre réel $\tan\theta$ (lorsqu'il existe) est le quotient de $\sin\theta$ par $\cos\theta$,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

mais c'est aussi l'ordonnée (lorsqu'elle existe) du point d'abscisse 1 de la droite $(OM(\theta))$ c'est à dire la pente (coefficient directeur) de la droite $(OM(\theta))$. Nous allons aborder les deux points de vue. Commençons par le premier.

La fonction tangente est la fonction associée à l'expression $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Cette expression n'est définie que pour les réels θ tels que $\cos\theta \neq 0$, c'est-à-dire pour les réels θ différents de $\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. La fonction tangente a donc pour ensemble de départ l'ensemble $D_T = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On a donc :

$$\begin{array}{rccc} \tan\ : & \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$

Passons à présent au deuxième point de vue où $\tan\theta$ est l'ordonnée du point d'abscisse 1 de la droite $(OM(\theta))$. On appelle **axe des tangentes** la droite d'équation $x = 1$ des points du plan d'abscisse 1 (repérée par les ordonnées de ces points). Pour tout nombre réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, la droite $(OM(\theta))$ intersecte l'axe des tangentes en un point $T(\theta)$. On a alors

$$p_2(T(\theta)) = \tan\theta\ .$$

Exercice

1. Tracer dans le plan complexe l'axe des tangentes et placer les points $M(\theta)$ et $T(\theta)$ pour $\theta \in \{-\pi/3, -\pi/6, \pi/6, \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/6, 4\pi/3\}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, que peut-on dire des points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$, des points $T(\theta)$ et $T(\theta + \pi)$? Déterminer l'ensemble des réels x tels que $T(x) = T(\theta)$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, montrer que $p_2(T(\theta)) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ et montrer que $y = (\tan\theta).x$ est l'équation de la droite $(OM(\theta))$.

1.2 Propriétés élémentaires

Le cercle trigonométrique étant de rayon 1, le théorême de Pythagore nous donne l'égalité

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.}$$

Cette égalité permet en particulier d'obtenir quelques valeurs des fonctions trigonométriques,

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X

Les configurations de symétrie illustrées avec les deux figures (2.1) et (2.2) ci-dessous permettent d'obtenir les relations élémentaires qui suivent :

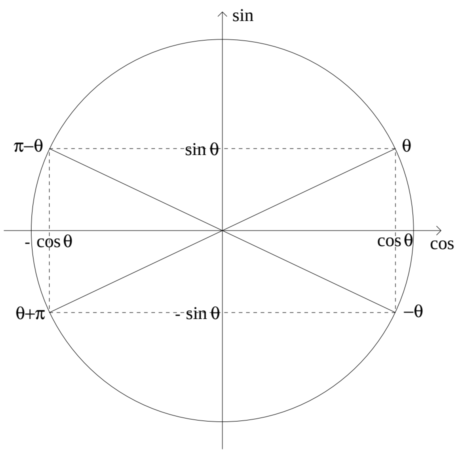


FIGURE 2.1:

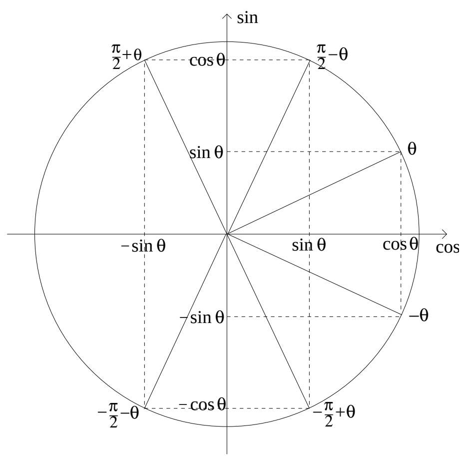


FIGURE 2.2:

$$\begin{array}{ccc}
\sin(-\theta) = -\sin\theta & \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta & \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \\
\cos(-\theta) = \cos\theta & \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta & \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \\
\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta & \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta & \\
\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta & \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta &
\end{array}$$

De même pour $\tan\theta$, soit en considérant les relations précédentes, soit avec des considérations de symétrie, on obtient pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \qquad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta.$$

Enfin, on rappelle les formules d'addition :

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.
\end{aligned}}$$

Exercices

1. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$, exprimer en fonction de $\tan\theta$, les réels $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)$ et $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)$.

2. En supposant connue la première des formules d'addition rappelées ci-dessus, montrer les deux suivantes (pour la seconde on peut utiliser $\sin(\alpha+\beta) = -\cos((\alpha+\pi/4)+(\beta+\pi/4))$.

3. Démontrer les formules suivantes,

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

1.3 Propriétés des fonctions circulaires

Puisque le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π, on a pour tout réel x, $M(x) = M(x + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions périodiques de période 2π. Leurs courbes représentatives sont donc invariantes par une translation de vecteur $\vec{u}(2\pi, 0)$ et il suffit donc de les connaître pour des points d'abscisses dans un intervalle de longueur 2π par exemple sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Par ailleurs, les propriétés de symétrie du cercle donne que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire. La courbe de la fonction cosinus est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées tandis que celle de la fonction sinus l'est par rapport à l'origine du repère. Ces parités, avec la périodicité, nous permettent d'obtenir les courbes les connaissant seulement pour leurs points d'abscisse dans $[0, \pi]$.

La fonction tan n'est définie que sur $D_T = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On a pour tout réel $x \in D_T$, $T(x) = T(x + k\pi), k \in \mathbb{Z}$, la fonction tangente est donc périodique de période π. Sa courbe représentative est ainsi invariante par une translation de vecteur $\vec{u}(\pi, 0)$ et il suffit donc de la connaître pour des points d'abscisse dans un intervalle de longueur π par exemple sur $]-\pi/2, \pi/2[$. La parité et la périodicité de la fonction tangente nous permettent d'obtenir sa courbe la connaissant seulement sur l'intervalle $[0, \pi/2[$.

Proposition 1.3.1 *Les fonctions numériques* sin *et* cos *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *; la fonction* tan *est dérivable en tout point de* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. *On a les formules :*

$$\boxed{\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ (\cos x)' &= -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ (\tan x)' &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}}$$

Preuve en exercice On montre d'abord que $\dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \dfrac{\sin x}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0, c'est-à-dire que la fontion sinus est dérivable en zéro de nombre dérivé 1.

1. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Soit $S(x)$ l'ensemble des points du secteur angulaire $([OM(0)), [OM(x)))$ intérieurs au cercle trigronométrique. Dessiner $S(x)$. Quelle est l'aire $A(x)$ de $S(x)$ sachant qu'elle est proportionnelle à x ?
2. En comparant l'aire du triangle de sommets O, $M(0)$ et $M(x)$ avec $A(x)$, montrer que $\sin x \leq x$.
3. En comparant l'aire du triangle de sommets O, $T(0)$ et $T(x)$ avec $A(x)$, montrer que l'on a $x \leq \tan x$.
4. Montrer alors que : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

On montre ensuite que $\dfrac{\cos x - 1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, c'est-à-dire que la fonction cosinus est dérivable en zéro de nombre dérivé 0.

1. Montrer que pour tout réel x non nul, $\dfrac{\cos x - 1}{x} = \dfrac{x}{2} \dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}$
2. En déduire la limite cherchée.

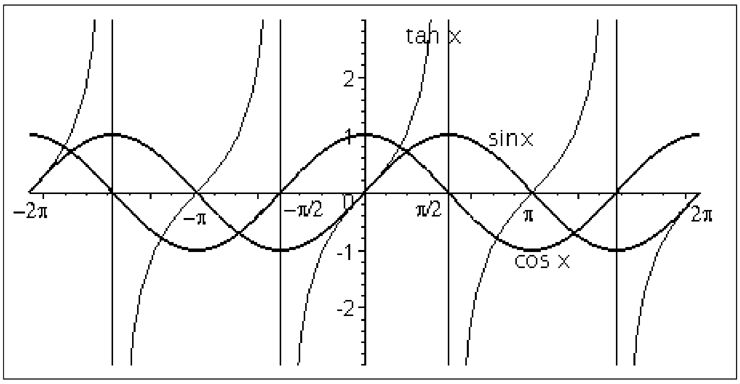
Enfin, de la formule d'addition du sinus, on déduit que pour tous réels a et h on a

$$\frac{\sin(a + h) - \sin a}{h} = -\sin a \frac{1 - \cos h}{h} + \cos a \frac{\sin h}{h}$$

et on voit que, pour a fixé, quand $h \to 0$ le premier terme de la somme tend vers 0, et le deuxième vers $\cos a$. Donc la fonction sin admet en a une dérivée égale à $\cos a$.
Pour le cos, on utilise $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ en dérivant terme à terme. Enfin, on en déduit la dérivée de la tangente par les règles de dérivation d'une fraction. □

Il en résulte notamment que ces fonctions sont continues sur leur domaine de définition. On en déduit que l'image des fonctions sin et cos est l'intervalle $[-1,1]$.
L'image de la fonction tan est $\mathbb{R}$ tout entier ; en effet, sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$, la fonction tan est continue, et croît de $-\infty$ à $+\infty$.

A partir de toutes ces données, on retrouvera le tableau de variation et l'allure du graphe de ces trois fonctions:



Exercice : position au voisinage de zéro

1. Déterminer l'équation de la tangente en $x_0 = 0$ des courbes $\mathcal{C}_{sin}$ et $\mathcal{C}_{tan}$ des fonctions sinus et tangente.
2. En utilisant des arguments de convexité, étudier sur $[0, \pi/2[$ la position relative de cette tangente T_0 avec $\mathcal{C}_{sin}$ et $\mathcal{C}_{tan}$. Reformuler ces positions en terme d'inégalités.

Exercice Etudier la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \sin x + \cos x$.

2 Les fonctions Logarithmes

2.1 Logarithme népérien

La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et deux d'entres elles diffèrent d'une constante (résultat que nous justifierons dans le chapitre primitives d'une fonction continue). Le **logarithme népérien** [1] est par définition la primitive sur $]0, +\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en zéro. C'est-à-dire,

$$\begin{array}{rccc} \ln : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt. \end{array}$$

On a bien $\ln 1 = 0$. Cette fonction en tant que primitive est évidemment dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

[1] Du nom du mathématicien et financier écossais John Neper (ou Napier) qui inventa la notion de logarithme en 1614.

Proposition 2.1.1 *Si a, b sont des réels positifs, on a*

$$\boxed{\ln(a\,b) = \ln a + \ln b.}$$

Preuve Considérons la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(ax)$. La règle de dérivation des fonctions composées nous donne que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions f et ln ont même fonction dérivée et sont ainsi deux primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1/x$. Elles ne diffèrent donc que d'une constante C, c'est à dire que pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln x + C$. En prenant $x = 1$, on trouve que $C = f(1) = \ln a$, donc pour tout $x > 0$ on a $f(x) = \ln(ax) = \ln a + \ln x$. On obtient évidemment la proposition en faisant $x = b$. □

Remarque Cette relation $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$ de la proposition (2.1.1) caractérise la fonction logarithme népérien parmi les fonctions définies sur $]0,+\infty[$, dérivables en 1, telles que $f'(1) = 1$. L'exercice donné en note de bas de page le montre ([2]).

La proposition (2.1.1), nous donne aisément les propriétés suivantes (où a et b désignent des réels positifs non nuls) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(1/a) = -\ln a \\ \ln(a/b) = \ln a - \ln b \\ \ln(a^n) = n \ln a, \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{array}}$$

Ces dernières relations permettent d'obtenir les limites en 0^+ et $+\infty$ de la fonction ln,

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \ln x = -\infty \end{array}}$$

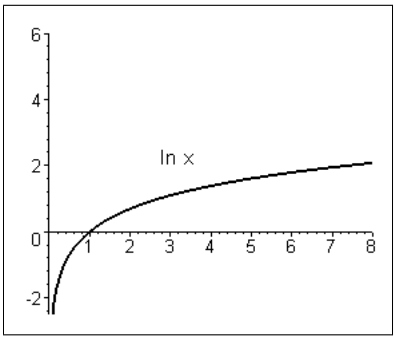
Preuve Pour la première propriété, il suffit de remarquer que $0 = \ln(1) = \ln(a/a) = \ln a + \ln(1/a)$. La seconde s'obtient avec $\ln(a/b) = \ln(a.1/b) = \ln a + \ln(1/b)$. Enfin, on prouve la dernière propriété par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $-n \in \mathbb{N}$ on utilise ce qui vient d'être montré.
Pour les limites, examinons d'abord la limite quand $x \to +\infty$. D'après les formules ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2^n) = n \ln 2$. Comme $\ln 2 > 0$, $\ln(2^n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. La fonction ln étant croissante puisque de dérivée positive, $\ln x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

[2]Exercice : Soit f définie sur $]0,+\infty[$ telle que f soit dérivable en 1 avec $f'(1) = 1$ et telle que pour tout $a > 0$ et $b > 0$ on ait $f(ab) = f(a) + f(b)$, montrer qu'alors $f = \ln$. Pour cela,

1. montrer que $f(1) = 0$, puis que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 1$,
2. en déduire alors que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = 1/x$,
3. conclure alors que $f = \ln$.

Pour la limite à droite en 0, posons $u = \frac{1}{x}$. Alors $\ln u = -\ln x$, et quand $x \underset{>}{\to} 0$,on a $u \to +\infty$ donc $\ln u \to +\infty$ et $\ln x \to -\infty$. □

Passons à présent à la représentation graphique de la fonction ln. Sa fonction dérivée $\ln' : x \mapsto 1/x$, est strictement positive sur $]0, +\infty[$, la fonction ln est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, la fonction ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\ln x)" = \frac{-1}{x^2}$. qui est strictement négatif sur $]0, +\infty[$. La fonction ln est donc strictement concave sur $]0, +\infty[$ avec des pentes des tangentes à sa courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ qui tendent à devenir nulles pour les points d'abscisses tendant vers $+\infty$. On obtient ainsi la courbe suivante :



La fonction ln est continue puisqu'elle est dérivable, l'ensemble de ses images, $\ln(\mathbb{R}^{+*})$ est donc un intervalle (T.V.I) et comme elle est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, l'ensemble de ses images est $\mathbb{R}$. De plus, la croissance stricte impose que tout réel y de $\mathbb{R}$ est l'image d'un unique réel positif. La fonction ln est donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. Résumons.

Proposition 2.1.2 *La fonction* ln *est une bijection continue et strictement croissante de* $\mathbb{R}^{+*}$ *sur* $\mathbb{R}$.

En particulier il existe un unique $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\ln x = 1$. On note ce réel par la lettre e. On peut démontrer que e est irrationnel. Le début de son développement décimal est $e = 2{,}71828\ldots$

Pour compléter le lexique indispensable sur la fonction ln, il peut être utile de se rappeler, puisque son nombre dérivée en $x_0 = 1$ est 1, que :

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Enfin, son comportement asymptotique au voisinage de 0^+ et $+\infty$ est précisé par la proposition qui suit (nous en verrons une autre plus fine dans le chapitre suivant).

Proposition 2.1.3 *On a les limites suivantes*

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto 0^+} x \ln x = 0.$$

Preuve Ces deux limites sont en faites équivalentes, on le vérifie en posant $x = 1/y$ dans l'une de ces deux limites pour obtenir l'autre en utilisant $(x \to +\infty \Leftrightarrow y \to 0^+)$ ou $(x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to +\infty)$. Montrons la première limite. La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$ est à valeurs strictement négatives (montrez le). On a ainsi

$$\forall x > 1, \quad 0 < \ln x < 2\sqrt{x},$$

ce qui permet d'établir après division par x pour $x > 1$,

$$\forall x > 1, \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}},$$

encadrement qui permet de conclure par passage à la limite en $x \to +\infty$. $\square$

Excercices

1. A partir de la courbe de la fonction ln, déduire le tracé des courbes des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\frac{1}{(1+x)^2}) \end{array}$$

2. Etudier la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x$.

3. Montrer que : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0, \quad \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sin(\sqrt{x})} = 1,$

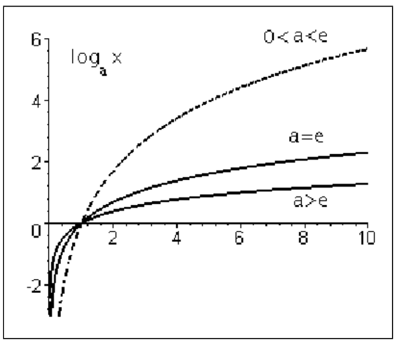
2.2 Logarithme à base a

Soit a un réel strictement supérieur à 1. On appelle **logarithme à base** a la fonction

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Le logarithme népérien est le logarithme à base e.

Comme $a > 1$, $\ln a > 0$, donc les propriétés de croissance et les limites en 0 et $+\infty$ sont les mêmes que pour la fonction ln.



On utilise en particulier les logarithmes décimaux (à base 10), notés tout simplement $\log x$. Ils sont assez commodes pour évaluer les ordres de grandeur : en effet si n est la partie entière de $\log x$, cela indique que x est entre 10^n et 10^{n+1}.
Par exemple, déterminer le nombre de chiffres du nombre : 2^{2013}.

3 Les fonctions Exponentielles

3.1 La fonction exponentielle

Puisque la fonction ln est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$, elle admet une fonction réciproque, strictement croissante (et continue (admis)) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On appelle cette fonction *exponentielle*, et on la note $y = \exp x$ ou $y = e^x$.
On a donc

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp x, \quad \text{avec } \exp x = y \Leftrightarrow \ln y = x, \end{array}$$

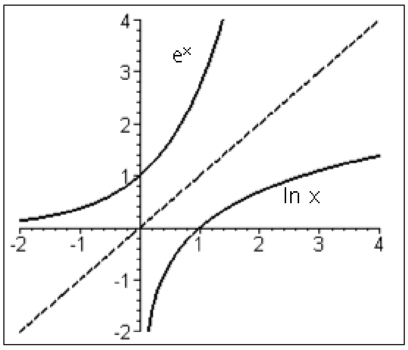
et : $\quad \forall x \in]0,+\infty[,\ \exp(\ln x) = x,$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp x) = x.$

Des valeurs $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$, on déduit immédiatement

$$\boxed{\exp(0) = 1, \qquad \exp(1) = e.}$$

Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, la courbe représentative $\mathcal{C}_{\exp}$ de la fonction exp et celle de la fonction ln, $\mathcal{C}_{\ln}$ sont symétriques d'axe de symétrie la première bissectrice $\Delta = \{M(x,y) \in P, y = x\}$, puisque :

$$M(x,y) \in \mathcal{C}_{\exp} \Leftrightarrow y = \exp x \Leftrightarrow \ln y = x \Leftrightarrow M(y,x) \in \mathcal{C}_{\ln}.$$



Proposition 3.1.1 *La fonction* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\exp'(x) = \exp(x).}$$

Preuve Nous admettrons ici que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous prouverons ce résultat dans un cadre plus général au prochain chapitre. Nous nous bornerons ici à déterminer la dérivée de la fonction exp.
Nous avons $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp x)) = x.$$

En dérivant les deux membres de cette dernière égalité , on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1,$$

soit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$ □

Proposition 3.1.2 *Pour a et b des réels, on a*

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b).}$$

Preuve Pour transformer l'expression $\exp(a) \cdot \exp(b)$, prenons son logarithme et appliquons la règle fondamentale de la Proposition 2.1.1 :

$$\ln(\exp(a) \cdot \exp(b)) = \ln(\exp a) + \ln(\exp b) = a + b.$$

En composant avec l'exponentielle on obtient la formule cherchée. □

Remarque Comme dans le cas de la fonction ln, cette relation $\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$ caractérise la fonction exponentielle parmi les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0, telles que $f'(0) = 1$. L'exercice en note de bas de page le montre ([3]).

On déduit immédiatement de (3.1.2) les propriétés supplémentaires :

$$\boxed{\begin{array}{l} \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp a} \\ \exp(na) = (\exp a)^n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{array}}$$

Toutes ces formules justifient que l'on note également cette fonction e^x, puisqu'elles s'expriment alors comme des propriétés « naturelles » des expressions comportant des exposants :

$$e^{a+b} = e^a\, e^b, \quad e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{na} = (e^a)^n$$

Pour terminer, précisons à présent le comportement asymptotique de la fonction exp au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. Le résultat qui suit est fondamental. Il formalise en particulier le fait que la fonction exp croit vers l'infini plus rapidement que toutes les fonctions puissances $x \mapsto x^n$.

Proposition 3.1.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les limites suivantes*

$$\lim_{x \mapsto -\infty} x^n\, .e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Preuve Ces deux limites sont équivalentes, on le vérifie en posant $x = -y$ dans l'une de ces deux limites pour obtenir l'autre. Montrons la seconde limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$, on a

$$\ln\left(\frac{e^x}{x^n}\right) = \ln(e^x) - \ln(x^n) = x - n\ln(x) = x\Big(1 - n\frac{\ln x}{x}\Big),$$

[3]Exercice : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que f soit dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ on ait $f(a+b) = f(a).f(b)$, montrer qu'alors $f = \exp$. Pour cela,

1. montrer que $f(0) = 1$, puis que $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-1}{h} = 1$,
2. en déduire alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = f(x)$,
3. en dérivant la fonction $f/\exp$, conclure alors que $f = \exp$.

et en prenant l'exponentielle on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$:

$$\frac{e^x}{x^n} = e^{x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)}.$$

Par ailleurs, la convexité de la fonction exponentielle avec sa tangente en zéro d'équation $y = 1 + x$ donne que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. On obtient alors à partir de l'égalité précédente l'inégalité suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$:

$$\frac{e^x}{x^n} \geq 1 + x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right),$$

ce qui permer d'établir le résultat pour $x \to +\infty$ puisque $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ $\square$

Exercice Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
1) Etudier les variations de f et ses limites en l'infini et en 0.
2) Etudier la convexité de f.
3) Tracer avec soin la courbe de f (préciser l'allure de cette dernière au voisinage du point O).

3.2 Fonction exponentielle à base a (fonction $y = a^x$)

Soit a un réel strictement positif fixé. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

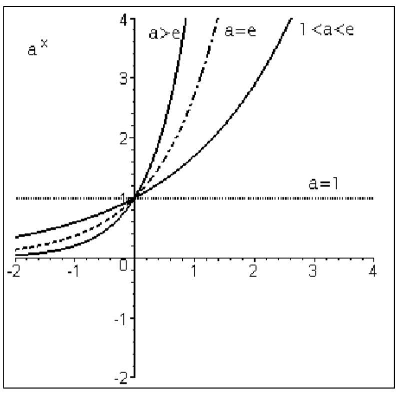
$$\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Remarquons que pour $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle, puisque $\ln e = 1$.
De plus, on a $y = a^x$ si et seulement si $\ln y = x \ln a$, donc $x = \dfrac{\ln y}{\ln a} = \log_a y$. Autrement dit $\exp_a$ est la fonction réciproque de $\log_a$.

La dérivée de cette fonction est obtenue par dérivation de $e^{x \ln a}$, on trouve

$$\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x.}$$

Le sens de variation et les limites en $\pm\infty$ dépendent du signe de $\ln a$: la fonction est croissante de 0 à $+\infty$ si $a > 1$ ($\ln a > 0$) et décroissante de $+\infty$ à 0 si $0 < a < 1$ ($\ln a < 0$). Elle est constante si $a = 1$.



Exercice Tracer le graphe des fonctions $y = (0.5)^x$ et $y = 2^x$. Comment passe-t-on géométriquement d'un graphe à l'autre ?

4 Courbes planes d'équation $y = f(x)$

La courbe plane d'équation $y = f(x)$ est la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f associée à l'expression $y = f(x)$. On notera dans la suite D_f le domaine de définition de l'expression $y = f(x)$, ensemble de départ de la fonction associée. Dans toute la suite le plan P est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

4.1 Branche infinie, comportement asymptotique

Définition 4.1.1 *On dit qu'une courbe d'équation $y = f(x)$ possède une branche infinie si la distance de l'origine O à un point $M(x, y)$ de cette courbe peut devenir aussi grande que l'on veut ("OM tend vers l'infini") pour x tendant vers un point de D_f ou vers une borne de D_f.*

Dans ce qui suit, on note ∞ pour traiter en même temps les cas $+\infty$ et $-\infty$.
On s'intéresse plus particulièrement aux trois situations suivantes :

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée asymptote verticale à la courbe.
2. Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$ pour un certain réel ℓ, la droite d'équation $y = \ell$ est appelée asymptote horizontale à la courbe.
3. Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on s'intéresse à savoir si la courbe d'équation $y = f(x)$ se rapproche à l'infini d'une courbe mieux connue. Nous allons étudier systématiquement le cas d'une droite.

Définition 4.1.2 *Deux courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = g(x)$ ayant des branches infinies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) sont dites asymptotes au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$).*

Si $\mathcal{C}_g$ est une droite D d'équation $y = mx + p$, alors D est asymptote à $\mathcal{C}_f$ si, pour $x \to \infty$

$$f(x) - (mx + p) \longrightarrow 0 \iff x\Big(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{p}{x}\Big) \longrightarrow 0.$$

Pour trouver une éventuelle droite asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$, on peut donc procéder comme suit :

1. On commence par calculer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Si cette limite est finie, disons qu'elle vaut m, ce nombre réel est éventuellement le coefficient directeur de la droite.
2. On calcule ensuite, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$. Si cette limite est finie, disons qu'elle vaut p, ce nombre réel est l'ordonnée à l'origine de la droite.

Si les limites mentionnées ci-dessus ne sont pas finies, voire n'existent pas, il n'y a pas de droite asymptote. Il y a cependant certains cas particuliers intéressants auxquels des noms ont été donnés. Le tableau ci-dessous résume les 3 cas à connaître :

• si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = p$,	"asymptote oblique d'équation $y = mx + p$ "
• si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \infty$,	"branche parabolique de direction $y = mx$ "
• si $\dfrac{f(x)}{x} \to \infty$ quand $x \to \infty$	"branche parabolique de direction Oy "

Exercice Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$ des trois fonctions définies par les expressions suivantes :

- $f_1(x) = 2x + 1 + \ln(x)$,
- $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$,
- $f_3(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$.

Remarque Dans le cas d'une asymptote oblique, on peut parfois préciser la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.
• Si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx - p] = 0^-$, la courbe de f est en-dessous de son asymptote au voisinage de l'infini.
• Si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx - p] = 0^+$, la courbe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de l'infini.

4.2 Points d'inflexion et la convexité

Définition 4.2.1 *Un point d'inflexion est un point de la courbe où celle-ci traverse sa tangente.*

Proposition 4.2.2 *Si une fonction f est dérivable deux fois, les points d'inflexion sont exactement les points où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.*

Exemple L'origine est un point d'inflexion pour $y = x^3$, mais pas pour $y = x^4$.

Proposition 4.2.3 *Si une fonction f est dérivable deux fois sur un intervalle I et que la dérivée seconde est positive sur I, alors f est convexe sur I.*

Exemple La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

4.3 Plan d'étude d'une courbe donnée par une équation $y = f(x)$

1) Recherche du domaine de définition de l'expression $y = f(x)$. Recherche de l'ensemble d'étude de la fonction f associée par des considérations de parité, périodicité, etc.

2) Etude de la continuité de f sur chaque intervalle de l'ensemble d'étude. Valeurs et, ou, limites aux bornes.

3) Etude de la dérivabilité de f. Décomposition de chaque intervalle en sous-intervalles de monotonie, grâce aux théorèmes liant le sens de variation au signe de la dérivée. Valeurs aux bornes de ces sous-intervalles.

4) Etude aux points de non-dérivabilité. Dans le cas où la fonction f n'est pas dérivable en un point x_0 :

• si elle admet cependant une dérivée à droite et/ou une dérivée à gauche (distincte) : il y a une (ou deux) demi-tangentes en x_0.

• si $f'(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers x_0 : il y a une tangente verticale en x_0. Il peut aussi y avoir une ou deux demi-tangentes verticales.

5) Consignation des résultats dans un tableau de variation.

6) Etude de la convexité et recherche des points d'inflexion.

7) Recherche des branches infinies et asymptotes.

8) Tracé des asymptotes et de la courbe.

5 Exercices

5.1 Soit f la restriction à $[0, 2\pi]$ de la fonction cos. Tracer la courbe de f, et utilisez-la pour répondre aux questions suivantes :

- Quelle est l'image par f des intervalles suivants :

$$]0, \pi[, \quad]0, 2\pi[, \quad [0, \pi/3], \quad]\pi/3, 4\pi/3].$$

- Déterminer les ensembles suivants :

$$A = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \geq 1\},$$

$$B = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) > 0\},$$

$$C = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) = 1/2\},$$

$$D = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \geq 1/2\}.$$

5.2 Déterminer la période T et tracer la courbe sur $[0, 4\pi]$ des trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \sin(2x)$, $f_2(x) = \sin(2x + \pi/4)$ et $f_3(x) = \sin(1/2x)$.

5.3 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 4\sqrt{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{1 - \sqrt{\sqrt{x}}}{x}$.
2. Etudier les variations de f, en déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) < 4\sqrt{\sqrt{x}}$.

5.4 Etudier la fonction numérique f définie par l'expression $f(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$.

5.5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que $f''(x)$ est du signe de $(x+1)(x^2 - 4x + 1)$. Etudier la convexité de la fonction f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 et préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente.
4. Tracer la courbe représentative de f.

5.6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = (x+4)e^{\dfrac{(x-1)}{x^2}}.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et 0.
2. Calculer la fonction dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = (x+2)h(x)$ où h est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. (a) Donner la limite en $+\infty$ de $e^{\dfrac{(x-1)}{x^2}}$.
   (b) Déterminer le signe au voisinage de $+\infty$ de $e^{\dfrac{(x-1)}{x^2}} - 1$.
   (c) En déduire la droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et leur position relative.
   (d) Suivre la même méthode pour trouver la droite asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et leur position relative.
4. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en déduire l'allure de la courbe représentative C_f de f au voisinage du point $(0, 0)$.
5. Tracer D et C_f.

5.7 On considère la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^x \sin x$.

1. Etudier le sens de variation de f et déterminer ses points d'inflexion.
2. Tracer dans un même repère les graphes des fonctions f, exp et $-\exp$. On tracera les tangentes aux points d'inflexion et on respectera la position relative de ces tangentes par rapport aux graphes des fonctions f, exp et $-\exp$.

5.8 On considère la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3}{x^3 + 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $x - 1 + \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^3 + 1}$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire l'existence d'une droite asymptote pour la courbe d'équation $y = f(x)$, et préciser leur position relative aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

5.9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$f(x) = xe^{\dfrac{1}{1 - x^2}}.$$

1. Déterminer la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe C de f?
2. Déterminer les limites à droite et à gauche de la fonction f au point $x = 1$.
3. Calculer la dérivée de f et la limite à droite au point $x = 1$ de f'.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $e^{\dfrac{1}{1 - x^2}}$. En déduire que la courbe C de f admet au voisinage de $+\infty$ une droite asymptote. On précisera la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
6. Préciser l'allure de C au voisinage du point $(1, 0)$. Tracer C.

5.10 On considère la fonction

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x - 2}{x - 1}}.$$

1. Pour quelles valeurs de x, $f(x)$ est-elle définie ? On note $\mathcal{C}$ le graphe de f.
2. Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $\sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 1}} - 1 = \dfrac{-1}{\sqrt{x - 1}(\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 1})}$ pour $x \geq 2$.
4. En déduire que la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$ vaut $-\frac{1}{2}$.
5. Conclure que la courbe $\mathcal{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote dont on donnera une équation. Préciser leur position relative.