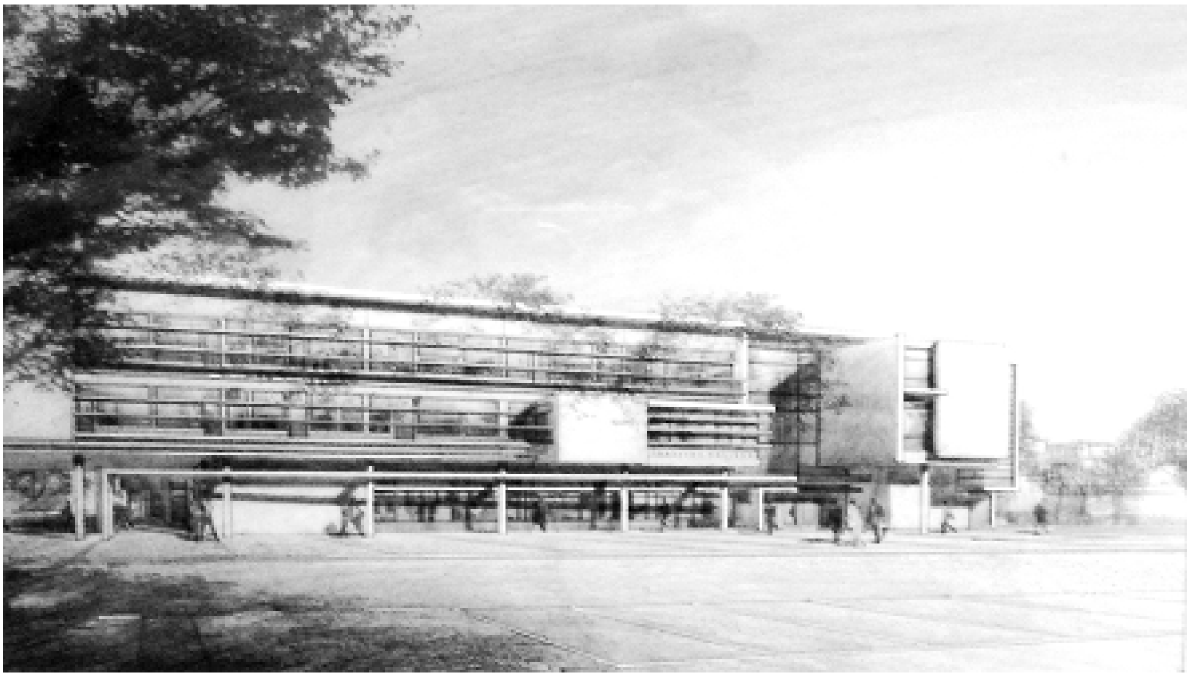
Institut Galilée

Sciences et technologies



Licence 1^{re} année

Mathématiques pour les sciences

Premier semestre

Département de Mathématiques

www.math.univ-paris13.fr/depart

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions numériques **5**

1 Concepts de base sur les fonctions numériques . . . 5

1.1 Notions d'Application . . . 5

1.2 Généralités sur les fonctions numériques . . . 9

1.3 Continuité et théorème des valeurs intermédaires . . . 15

2 Dérivée d'une fonction . . . 18

2.1 Dérivabilité . . . 18

2.2 Dérivabilité et opérations sur les fonctions . . . 20

2.3 Fonction dérivée . . . 22

2.4 Théorème des Accroissements finis . . . 22

2.5 Utilisation de la dérivée à l'étude des fonctions . . . 24

2.6 Convexité et dérivée seconde . . . 26

3 Exercices . . . 28

2 Les premières fonctions de référence **33**

1 Les fonctions trigonométriques d'une variable réelle . . . 33

1.1 Définitions des fonctions sinus, cosinus et tangente . . . 33

1.2 Propriétés élémentaires . . . 35

1.3 Propriétés des fonctions circulaires . . . 36

2 Les fonctions Logarithmes . . . 38

2.1 Logarithme népérien . . . 38

2.2 Logarithme à base a . . . 41

3 Les fonctions Exponentielles . . . 42

3.1 La fonction exponentielle . . . 42

3.2 Fonction exponentielle à base a (fonction $y = a^x$) . . . 44

4 Courbes planes d'équation $y = f(x)$ . . . 45

4.1 Branche infinie, comportement asymptotique . . . 45

4.2 Points d'inflexion et la convexité . . . 46

4.3 Plan d'étude d'une courbe donnée par une équation $y = f(x)$ . . . 47

5 Exercices . . . 47

3 Les fonctions réciproques de référence **51**

1 Généralités sur les fonctions réciproques . . . 51

1.1 Injection, surjection et bijection . . . 51

1.2 Fonction réciproque . . . 53

1.3 Sens de variation d'une fonction réciproque . . . 53

1.4 Continuité et dérivabilité d'une fonction réciproque . . . 54

2 Fonctions puissance 54
2.1 Racine n-ième 54
2.2 Exposant rationnel quelconque 55
2.3 Puissances à exposant réel 56
2.4 Fonctions $y = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$ 57
3 Fonctions circulaires réciproques 57
3.1 Fonction Arc sinus 57
3.2 Fonction Arc cosinus 58
3.3 Fonction Arc tangente 59
3.4 Dérivées des fonctions circulaires réciproques 60
4 Exercices 61

Chapitre 3

Les fonctions réciproques de référence

Le but de ce chapitre est d'étudier la notion de fonction réciproque, qui va nous permettre de définir d'importantes nouvelles fonctions.

1 Généralités sur les fonctions réciproques

Une question naturelle que l'on peut se poser sur une fonction $f : X \to Y$ est de savoir s'il existe une fonction $g : Y \to X$ qui "permet de revenir en arrière", c'est à dire telle que $g(f(x)) = x$ pour tout x de X.

$$X \underset{\mathrm{g}}{\overset{\mathrm{f}}{\rightleftarrows}} Y$$

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est la fonction racine carrée, c'est l'élévation au carré qui convient comme fonction g. On demande aussi à cette fonction g de vérifier $f(g(y)) = y$ pour tout y de Y. En reprenant l'exemple de la racine et du carré, on se rend compte d'un problème. On a bien $\sqrt{y^2} = y$ pour $y \geq 0$, mais $\sqrt{y^2} = -y$ pour $y < 0$. Il faut donc être attentif aux ensembles de départ et d'arrivée des fonctions f et g.

Pour une fonction $f : X \to Y$ donnée, une fonction réciproque n'existe pas forcément (mais sera unique si elle existe). Pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes à cette existence, on étudie certaines propriétés des fonctions : injectivité (existe-t-il x_1 et x_2 différents dans X tels que $f(x_1) = f(x_2)$) et surjectivité (pour tout y dans Y, peut-on trouver un x dans X tel que $y = f(x)$).

Les exemples fondamentaux sont les racines n-ièmes et les réciproques des fonctions trigonométriques (qui se trouvent généralement dans les calculatrices sous les noms $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$). On les définit ici soigneusement et on étudie leurs propriétés.

1.1 Injection, surjection et bijection

Dans ce paragraphe, si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}$, la notation $f : X \to Y$ signifie que f est une fonction définie sur X et à valeurs dans Y.

Remarque On rappelle qu'on nomme ensemble de définition de f le plus grand sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ tel que $f(x)$ est défini pour tout x dans D_f. L'ensemble X ci-dessus doit donc être un sous-ensemble de D_f.
De plus, pour que la notation $f : X \to Y$ ait un sens, il est aussi nécessaire que Y contienne tous les nombres de la forme $f(x)$ pour x dans X, c'est-à-dire que $f(X) \subset Y$. Par exemple, parler de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$ telle que $f(x) = x^2$ n'a pas de sens.

Définition 1.1.1 *Soit une fonction $f : X \to Y$.*
• *La fonction $f : X \to Y$ est dite injective si pour tout $x_1 \in X$, pour tout $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ entraîne $f(x_1) \neq f(x_2)$. De manière équivalente, $f : X \to Y$ est injective si tout point de Y a au plus un antécédent par f.*
• *La fonction $f : X \to Y$ est dite surjective si $f(X) = Y$ c'est-à-dire si tout réel y de Y a au moins un antécédent par f.*
• *Enfin on dit que la fonction $f : X \to Y$ est bijective si tout réel y de Y possède un unique antécédent par f. On dira alors que f réalise une bijection de X sur Y.*

Proposition 1.1.2 *$f : X \to Y$ est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.*

Exemples La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective puisque $f(2) = f(-2)$. En revanche $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ est injective car tout élément $y \in \mathbb{R}$ admet au plus un antécédent par g:

- Si $y < 0$ alors y n'admet aucun antécédent par g.
- Si $y \geq 0$ alors y admet $\sqrt{y}$ comme unique antécédent par g.

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective car -1 n'admet pas d'antécédent par f, mais $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $h(x) = x^2$ est surjective car tout nombre positif y admet au moins un antécédent par h, $\sqrt{y}$.
De notre petite étude, nous pouvons déduire que la fonction $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $k(x) = x^2$ est bijective. En effet, tout nombre positif y admet exactement un antécédent par k, $\sqrt{y}$. De la même manière, la fonction $l : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ par $l(x) = x^2$ est une bijection car tout nombre positif y admet pour unique antécédent $-\sqrt{y}$.

Remarque Pour obtenir une fonction injective à partir de $f : X \to Y$, on remplace l'ensemble de départ X par un plus petit ensemble bien choisi. Pour rendre f surjective, on remplace l'ensemble d'arrivée par $f(X)$ (l'ensemble des nombres de la forme $f(x)$ pour x dans X). Notamment, si f est injective de X dans Y, on note que f réalise une bijection de X sur $f(X)$.

Le théorème suivant permet bien souvent de montrer qu'une fonction est bijective:

Théorème 1.1.3 *Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle et la fonction $f : I \to f(I), x \mapsto f(x)$ est bijective.*

Preuve La fonction f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires affirme que $f(I)$ est un intervalle. De plus, f étant strictement monotone, pour x_1 et x_2 dans I, l'inégalité $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$ (suivant que f soit croissante ou décroissante). Donc $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui signifie que f est injective de I dans $\mathbb{R}$. On conclut en utilisant la fin de la remarque précédente. □

Exercice La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 - 2x$ est-elle bijective? Si ça n'est pas le cas, modifier les ensembles de départ et d'arrivée pour obtenir une fonction f d'expression $f(x) = x^2 - 2x$, qui le soit.

1.2 Fonction réciproque

Si $f : X \to Y$ est une bijection, à chaque $y \in Y$ correspond un unique élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Cela définit une fonction de Y dans X, appelée fonction réciproque de f

Définition 1.2.1 *Soit $f : X \to Y$ une bijection, on appelle fonction réciproque de f que l'on note f^{-1}, la fonction $f^{-1} : Y \to X$ telle que*

$$\forall y \in Y \ , \forall x \in X \ , \ f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Remarques

- Si f est bijective alors sa fonction réciproque l'est aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$. On a $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout y de Y et $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout x de X.
- Un exemple fondamental de fonctions réciproques l'une de l'autre sont les fonctions exponentielle et logarithme.
- Il ne faut pas confondre la fonction réciproque f^{-1} avec la fonction $\dfrac{1}{f}$.

Exemple Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2x + 1$. La fonction h est bijective et sa bijection réciproque $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $h^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

Exercice Soit $f : X \to Y$ définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$. Déterminer X et Y, sous-ensembles de $\mathbb{R}$ les plus grands possibles, tels que f soit une bijection, et calculer l'expression de f^{-1}.

Graphe d'une bijection et de sa réciproque

Considérons une fonction numérique bijective $f : X \to Y$ et sa bijection réciproque $f^{-1} : Y \to X$.
Le couple (a, b) appartient au graphe de f si et seulement si $b = f(a)$, ou encore $a = f^{-1}(b)$, c'est-à-dire que le couple (b, a) appartient au graphe de f^{-1}. Dans un repère orthonormé les points de coordonnées les couples (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la première bissectrice. On a donc la propriété suivante :

Proposition 1.2.2 *Dans un repère orthonormé la représentation graphique d'une fonction bijective et celui de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

1.3 Sens de variation d'une fonction réciproque

Proposition 1.3.1 *Si $f : I \to J$ est bijective et strictement monotone sur I, alors f^{-1} est strictement monotone de même sens sur J.*

Preuve Etudions le cas où f est strictement croissante. Soient y et y' dans J tels que $y < y'$. Posons $f^{-1}(y) = x$ et $f^{-1}(y') = x'$. Raisonnons par l'absurde : si l'on avait $x \geq x'$ on aurait $f(x) \geq f(x')$, c'est-à-dire $y \geq y'$. Contradiction.
Donc $x < x'$ et f^{-1} est strictement croissante. Le cas où f est strictement décroissante s'étudie de la même façon. □

1.4 Continuité et dérivabilité d'une fonction réciproque

Concernant la continuité, on admet le résultat suivant :

Proposition 1.4.1 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to J$ est une bijection continue alors sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est également continue.*

Proposition 1.4.2 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une bijection continue. Si f est dérivable au point $x_0 \in I$ et que $f'(x_0) \neq 0$ alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et on a*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Preuve Les hypothèses impliquent que f^{-1} est continue. Soient $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$. Si $y \neq y_0$ on a forcément $x \neq x_0$ et bien sûr $f(x) - f(x_0) \neq 0$.
Alors
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

Quand $y \to y_0$, x tend vers x_0 (parce que f^{-1} est continue) donc la deuxième fraction tend vers $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

Remarque Par contre, si $f'(x_0) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x_0)$ et le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale au point $M(y_0, f^{-1}(y_0)) = M(f(x_0), x_0))$. C'est notamment le cas en $x_0 = 0$ pour la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$, avec f^{-1} la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0.

2 Fonctions puissance

Les fonctions puissance déjà connues sont les $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ pour n un entier. Le but de cette section est de définir les fonctions puissance $x \mapsto x^r$ dans le cas le plus général possible. Le nombre r sera d'abord l'inverse d'un entier, puis un rationnel, et finalement un réel quelconque.

2.1 Racine n-ième

On a vu que si n est un entier impair et positif, P_n est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Elle admet donc une fonction réciproque, qui est également une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On note cette fonction réciproque
$$R_n(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

D'après la formule de dérivation d'une fonction réciproque, on a

$$R_n'(x) = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}}.x^{-1}$$

Le nombre dérivé n'existe que pour $x \neq 0$. En 0, R_n est continue, mais non dérivable. Cela se traduit dans ce cas par le fait que le graphe de $R_n$possède en $O(0,0)$ une tangente verticale.

Si n est un entier positif pair, la fonction P_n n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$. Mais si on la restreint à $\mathbb{R}^+$, on obtient une bijection strictement croissante continue de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même. Il existe donc une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}^+$, notée de même $R_n(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.
Mais elle n'est pas dérivable en 0, car son graphe admet au point $(0,0)$ une demi-tangente verticale.

Exercice Tracer sur un même schéma l'allure des graphes de $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ et $y = \sqrt[4]{x}$.

2.2 Exposant rationnel quelconque

Si r est un rationnel quelconque, il peut se mettre sous la forme $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$, on peut vérifier que l'on a :

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Cette dernière égalité permet ainsi de définir l'expression $x^{\frac{p}{q}}$ comme étant égale à l'un des deux menbres de l'égalité précédente, par exemple et pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}.$$

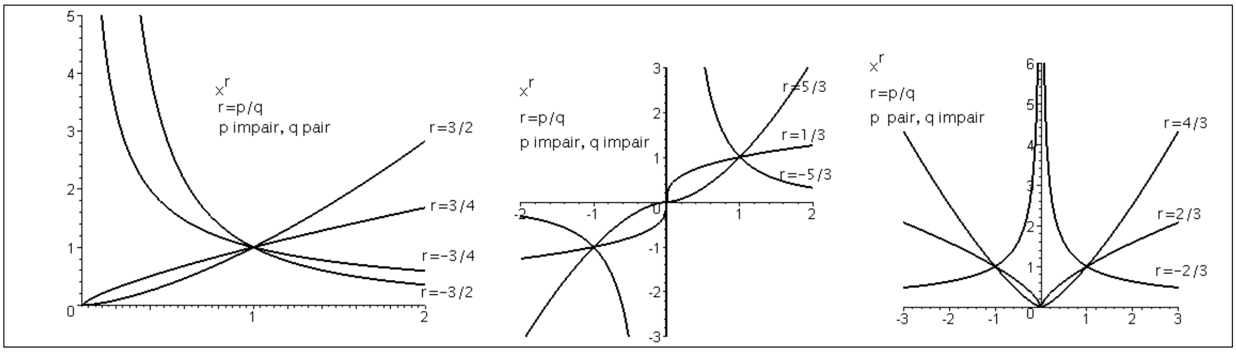
Remarques

- Supposons qu'on choisisse p et q de façon que la fraction soit irréductible. Si q est impair, on peut étendre la définition ci-dessus à $x < 0$. En effet, la racine q-ième est définie sur $\mathbb{R}$ lorsque q est impair, contrairement au cas q pair. La fonction P_r est alors paire ou impaire, suivant que p est un nombre pair ou impair.

- Si $r = \frac{p}{q}$ est strictement positif, on a toujours $0^r = 0$. Ceci permet d'ajouter 0 à l'ensemble de définition de P_r quand $r \geq 0$.

Exercice Représenter dans un même repère les graphes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{3}{5}}$ et $x \mapsto x^{\frac{5}{3}}$. On précisera la parité de ces fonctions, on étudiera leur dérivabilité en 0, et on précisera la tangente au graphe au point O.

Exercice Représenter dans un même repère les graphes des fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ et $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$. On précisera la parité de la deuxième fonction, on étudiera leur dérivabilité en 0, et on précisera la tangente (ou demi-tangente) au graphe au point $O(0,0)$.



On retiendra les égalités suivantes, vraies chaque fois qu'elles sont définies (a et b désignent des rationnels) :

$$\boxed{\begin{aligned} x^a\, x^b &= x^{a+b} \\ x^a \,/\, x^b &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{ab} \\ (x^a)' &= a x^{a-1}. \end{aligned}}$$

Ces formules ne font qu'étendre aux exposants rationnels les propriétés déjà connues pour les exposants entiers.
La fonction P_a n'est dérivable en 0 (ou dérivable à droite en 0, suivant le cas) que si $a \geq 1$.

2.3 Puissances à exposant réel

Remarquons que, si $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a l'égalité $x^r = \exp(\ln x^r) = \exp(r \ln x)$. Il est naturel d'étendre cette égalité à tout $r \in \mathbb{R}$:

Définition 2.3.1 *Soit a un réel positif, b un réel quelconque. On note a^b la quantité $\exp(b \ln a)$.*

On a donc, pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, l'identité

$$\boxed{a^b = e^{b \ln a}.}$$

Exercice Vérifier qu'on a toujours les égalités $a^{b+c} = a^b\, a^c$, $a^0 = 1$ et $a^{-b} = 1/a^b$.

On peut alors étudier deux types de fonctions :

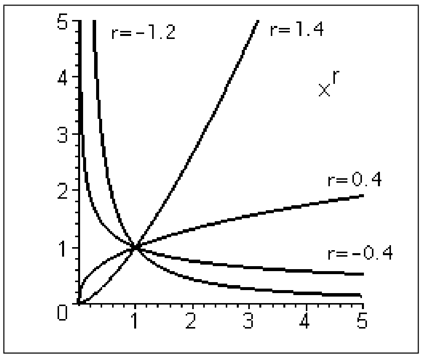
- ou bien b est fixé, a varie, et on étudie la fonction $x \mapsto x^b$ (fonction "puissance" d'exposant b).
- ou bien a est fixé, b varie, et on étudie la fonction $x \mapsto a^x$ (fonction "exponentielle à base a").

2.4 Fonctions $y = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$

Pour un réel fixé r, on peut définir sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction $P_r(x) = x^r = e^{r \ln x}$.
On obtient facilement les propriétés

$$1^r = 1, \quad (x^r)' = r\, x^{r-1}.$$

Si $r > 0$, on a $x^r \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et $x^r \to 0$ quand $x \to 0^+$.
Si $r < 0$, on a $x^r \to 0^+$ quand $x \to +\infty$ et $x^r \to +\infty$ quand $x \to 0^+$.
Tout cela ne fait que prolonger les propriétés des fonctions x^r $(r \in \mathbb{Q})$.



Exercice Supposons que $r < s$; comparer x^r et x^s suivant les valeurs de x.

Proposition 2.4.1 (Croissances comparées) *Pour tout réel $r > 0$, on a*

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty, \qquad \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \qquad \lim_{x \mapsto 0^+} x^r \ln x = 0.$$

Preuve Montrons d'abord la première limite. Posons $n = \mathrm{E}(r) + 1$ (partie entière de r plus 1). Pour tout $x > 1$ on a donc $0 < x^r < x^n$ et ainsi $\dfrac{e^x}{x^n} < \dfrac{e^x}{x^r}$. On conclu ensuite en uitilisant la proposition (3.1.3) du second chapitre. Les deux autres limites s'obtiennent en posant $y/r = \ln(x)$.

3 Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions circulaires sin, cos et tan ne sont pas bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et n'admettent donc pas globalement de fonctions réciproques. Mais pour chacune de ces fonctions, on peut trouver un intervalle, le plus grand possible, sur lequel la restriction de la fonction considérée est bijective. Par commodité, on choisira un intervalle contenant la valeur 0. On peut alors définir ce qu'on appelle les **fonctions circulaires réciproques** (ou fonctions circulaires inverses, ou fonctions trigonométriques réciproques).

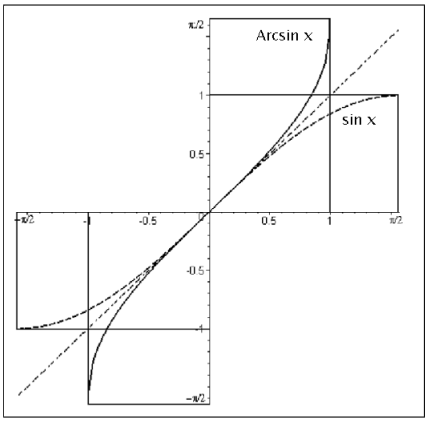
3.1 Fonction Arc sinus

La fonction sin, restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, est continue et strictement croissante de -1 à 1. Cette restriction est donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Elle admet une

fonction réciproque, notée Arcsin, bijection strictement croissante et continue de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
On peut donc définir :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] \quad y = \operatorname{Arcsin} x \Leftrightarrow \left(x = \sin y \text{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).}$$

On pourra retenir « Arcsin x *est l'arc, compris entre* $\frac{\pi}{2}$ *et* $-\frac{\pi}{2}$*, dont le sinus vaut* x ».
Notons que la fonction ainsi obtenue est impaire.



Ainsi, par exemple, on a $\sin \frac{5\pi}{6} = 1/2$, mais $\frac{5\pi}{6} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc Arcsin (1/2) n'est pas égal à $\frac{5\pi}{6}$.

Mais on a aussi $\sin \frac{\pi}{6} = 1/2$, et cette fois-ci $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\operatorname{Arcsin}(1/2) = \frac{\pi}{6}$.

On retiendra les valeurs

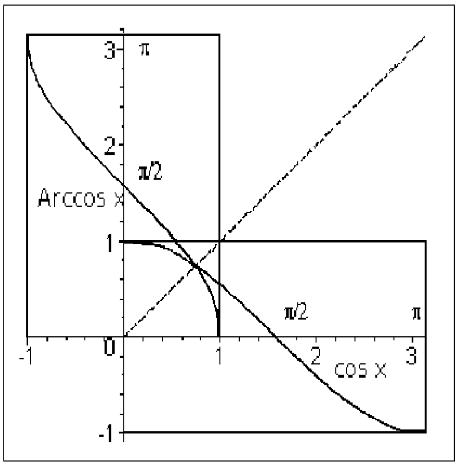
$$\operatorname{Arcsin}(0) = 0, \quad \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

3.2 Fonction Arc cosinus

La fonction cos, restreinte à l'intervalle $[0,\pi]$, est continue et strictement décroissante de 1 à -1. Cette restriction est donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Cette restriction admet donc une fonction réciproque, notée Arccos, bijection strictement décroissante et continue de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.
On définit donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] \quad y = \operatorname{Arccos} x \Leftrightarrow (x = \cos y \text{ et } y \in [0,\pi]).}$$

On pourra retenir « Arccos x *est l'arc, compris entre* 0 *et* π*, dont le cosinus vaut* x ».



Ainsi $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ ont tous les deux un cosinus égal à 0. Mais comme seul $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, on a $\operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$.

On retiendra les valeurs

$$\operatorname{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arccos}(1) = 0, \quad \operatorname{Arccos}(-1) = \pi.$$

3.3 Fonction Arc tangente

La fonction tan, restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (intervalle ouvert !), est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$. C'est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Elle admet une fonction réciproque, notée Arctan (ou Arctg), bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

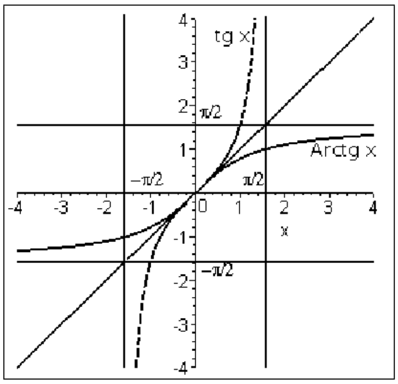
On peut donc écrire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad y = \operatorname{Arctan} x \Leftrightarrow \left(x = \tan y \text{ et } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).}$$

On pourra retenir « Arctan x *est l'arc, compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$*, dont la tangente vaut* x » . La fonction ainsi obtenue est impaire.

Notons qu'en particulier, $\operatorname{Arctan} x \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$ et $\operatorname{Arctan} x \to -\frac{\pi}{2}$ quand $x \to -\infty$. On retiendra également que

$$\operatorname{Arctan}(0) = 0, \qquad \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}.$$



Exercices

1. Calculer Arcsin $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, Arccos $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, Arccos $\left(-\frac{1}{2}\right)$, Arctan $(\sqrt{3})$ et Arctan $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
2. Les fonctions Arcsin et Arctan sont impaires. Peut-on dire que la fonction Arccos est paire ?
3. Pour quelles valeurs de x les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(\sin x) &= x,\\ \sin(\operatorname{Arcsin} x) &= x,\\ \operatorname{Arccos}(\cos x) &= x,\\ \cos(\operatorname{Arccos} x) &= x.\end{aligned}$$

3.4 Dérivées des fonctions circulaires réciproques

Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la fonction sin est dérivable, et sa dérivée ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Par la proposition (1.2.4), la fonction réciproque Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. On voit qu'il en est de même de la fonction Arccos. Par ailleurs, la fonction tan est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée ne s'annule jamais. Il en résulte que la fonction Arctan est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

Proposition 3.4.1 *Les fonctions* Arcsin *et* Arccos *sont dérivables sur* $]-1, 1[$, *avec*

$$\boxed{\operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \operatorname{Arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

La fonction Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et on a*

$$\boxed{\operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Preuve Soit $x \in]-1, 1[$, et soit $y = \operatorname{Arcsin} x$, donc $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x = \sin y$. Comme $\sin' y = \cos y$, la formule de dérivation d'une fonction réciproque donne $\operatorname{Arcsin}' x = \dfrac{1}{\cos y}$. Mais comme $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos y > 0$, donc $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. On trouve bien la formule annoncée pour la dérivée de Arcsin.

De même, si $x \in]-1,1[$ et $u = \text{Arccos}\, x$, on a $x = \cos u$ et $u \in]0,\pi[$. Donc $\text{Arccos}'x = \dfrac{1}{-\sin u} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et comme $u \in]0,\pi[$ implique $\sin u > 0$, on obtient $\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u} = \sqrt{1-x^2}$. D'où la formule pour Arccos'.

Enfin, soit $v = \text{Arctan}\, x$, donc $x = \tan v$. On rappelle que $\tan' v = 1 + \tan^2 v$. Donc $\text{Arctan}'x = \dfrac{1}{1+\tan^2 v} = \dfrac{1}{1+x^2}$. □

4 Exercices

4.1 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

- $f_1 : \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f_1(x) = \cos x$.
- $f_2 : [2,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f_2(x) = \sqrt{x} - 1$.
- $f_3 : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ définie par $f_3(x) = \tan x$.
- $f_4 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_4(x) = x \sin x$.

4.2 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to Y$ définie par $f(x) = 1 - x$ si $x \leq 2$ et $f(x) = 3x - 5$ si $x > 2$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un ensemble Y à déterminer. Déterminer sa bijection réciproque.

4.3 Soit $f :? \to ?$ définie par $f(x) = \ln(x^2 + e)$.

1. Déterminer l'ensemble Y tel que $f : \mathbb{R} \to Y$ est surjective.
2. Trouver un intervalle I le plus grand possible tel que $f : I \to \mathbb{R}$ est injective. Combien de choix a-t-on pour I ?
3. Trouver un ensemble X qui ne soit pas un intervalle tel que $f : X \to Y$ est bijective. Combien de choix a-t-on pour X ?

4.4 Démontrer que la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x + 3$ réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un ensemble Y à déterminer.Déterminer sa fonction réciproque.

4.5 Soit a, b, c, d 4 nombres réels vérifiant $ad - bc > 0$ et $c \neq 0$. Soit $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1. Déterminer l'ensemble de départ D de la fonction f associée à cette expression.
2. Calculer la dérivée de f, les limites aux bornes de l'ensemble de définition, et établir le tableau de variation de f.
3. En déduire $f(D)$ et justifier que f réalise une bijection de D dans $f(D)$.
4. Déterminer la bijection réciproque de f.

4.6 On pose $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 11} - 2$.

1. Quel est l'ensemble de départ D de la fonction f associée à cette expression ?
2. Sans calculer la dérivée de f, trouver le sens de variation de f.
3. En déduire que f réalise une bijection de D sur un ensemble Y à déterminer.
4. Résoudre $f(x) = 0$ et en déduire l'ensemble X tel que f réalise une bijection de X sur $[0, +\infty[$.

4.7 Dériver les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ associées aux expressions suivantes et étudier le signe de leurs dérivées :
$x \mapsto x^{1/x}$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$.

4.8 Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $A(4,0)$, $B(4,2)$ et $C(3,3)$. Dessiner les triangles rectangles OAB et OBC. Montrer par un raisonnement géométrique que l'on a

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

4.9 A l'aide de la dérivation, montrer que la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$ est constante. On déterminera la valeur de la constante.
Retrouver ce résultat en utilisant la relation $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$.

4.10 Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin} x = \frac{2\pi}{3}$.

4.11

1. Pour quelles valeurs réelles de x a-t-on $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$?
2. Pour quelles valeurs réelles de x les expressions $f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan x)$ et $g(x) = \tan(\operatorname{Arctan} x)$ sont-elles définies ? Tracer les graphes des fonctions f et g associées à ces expressions.

4.12

1. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$. En déduire une simplication de l'expression de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Etablir une relation entre $\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ et $\tan y$, puis retrouver le résultat de la première question sans calculer la dérivée de f.

4.13 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/a\}$ par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)$. En déduire une expression simplifiée de $f($ sur $\mathbb{R} \setminus \{1/a\}$.

4.14 (Extrait partiel 2008) Soit $g : \ ]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, définie par $g(\theta) = \operatorname{Arcsin}(\sin(2\theta))$.

1. Calculer $g\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $g\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. Écrire une simplification de $g(\theta)$ selon que θ appartienne à $]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}[$, $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ ou $]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$.

3. Soit à présent la fonction numérique réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

   (a) Calculer $f(0)$ et $f(\sqrt{3})$.

   (b) On pose $\theta = \text{Arctan}\, x$. Montrer que $\sin(2\theta) = \frac{2x}{1+x^2}$.

   (c) Déduire de ce qui précède une simplification de $f(x)$.

4.15 Résoudre l'équation:

$$\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\,(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$$

4.16 On considère la fonction f associée à l'expression$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$.

1. Quel est l'ensemble de départ de f ?

2. Résoudre $f(x) = 0$.

3. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ? Calculer la dérivée et étudier son signe.

4. Etudier la dérivabilité à droite en 0.

5. Quel type de branche infinie possède la courbe représentative de f ?

6. Etablir le tableau de variation de f et tracer la courbe.

4.17 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{Arctan}\, x + |x|$.

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ?

2. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

3. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée et établir le tableau de variations de f.

4. Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ de la courbe représentative de f, et leurs positions relatives par rapport à celle-ci.

5. Tracer la courbe représentative de f. On précisera les demi-tangentes au voisinage de $(0,0)$.