CONVERGENCE MONOTONE ET LEMME DE FATOU

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Dans les quatres cas suivants, montrer la suite $\left(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda\right)$ est convergente et déterminer sa limite :

1. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$,
2. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$,
3. $f_n(x) = \sin(nx)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe une constante K telle que

$$\sup_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu \leq K.$$

Montrer que $\int_X f d\mu \leq K$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonction intégrable qui converge presque partout vers une fonction intégrable f.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X |f| d\mu.$$
2. Réciproquement, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X |f| d\mu$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$
Indication : Appliquer le lemme de Fatou pour les fonctions $g_n = |f| + |f_n| - |f - f_n|$.
3. Résumer les résultats de questions précédentes en une équivalence.
4. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions intégrables qui converge simplement vers une fonction intégrable f telle que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$
mais f_n ne converge pas vers f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(X)$.

1. Montrer que
$$\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

2. En déduire que, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) < \delta \Longrightarrow \int_X |f| d\mu < \varepsilon.$$
(Continuité de l'intégrale par rapport à la mesure).
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda & \text{si } x \geq 0; \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
Démontrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Un critère d'intégrabilité. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute fonction mesurable réelle f sur X, on note ϕ_f la fonction
$$\phi_f : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mu(\{f > t\}).$$

1. Montrer que, si f étagée positive, que ϕ_f est mesurable, étagée et positive et que la formule suivante est satisfaite :
$$\int_X f d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \phi_f(t) dt. \tag{1}$$
2. L'identité précédente est-elle vraie dans le cas d'une fonction mesurable positive quelconque ?
3. Est-elle vraie dans le cas d'une fonction intégrable quelconque ?
4. Montrer que pour toute fonction mesurable sur X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour tout $p \in (0, +\infty)$ on a
$$\int_X f^p d\mu = p \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > s\}) s^{p-1} ds.$$
5. Utiliser ce qui précède pour montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\|x\|^p}$ est intégrable dans un voisinage de l'origine si et seulement si $p < d$.