Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1. Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^3+t^3} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est décroissante.
3. Calculer $f(0)$ et déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 2. Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos t}{t+x} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les variation de f.
3. Calculer les limites $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$.
4. Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f' + g' = 0$.
3. Montrer que $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$.

Exercice 4. Le but cet exercice est de montrer que $I := \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx = \dfrac{\pi}{2}$.

1. - Montrer que l'intégrale I généralisé est convergente.
   - Est-ce que la fonction $g : x \mapsto \sin x / x$ est Lebesgue-intégrable sur $[0, \infty)$?
2. Soit $f(t,x) = \dfrac{\sin x}{x} e^{-xt} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}$.
   - Montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$.
   - Montrer que la fonction $F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t,x) dx$ est dérivable sur $(0, +\infty)$.
   - Calculer $F'(t)$ puis $\lim_{t \to +\infty} F(t)$. En déduire que $F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan t$.

Exercice 5. La formule de Stirling. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que Γ est une fonction convexe.

4. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$. En déduire une expression de $\Gamma(n)$ pour n entier non nul.
5. Effectuer le changement de variable $u = \dfrac{t-n}{\sqrt{n}}$ pour montrer que
$$\Gamma(n+1) = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}du.$$
6. Déduire de la question précédente la formule de Stirling.
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
7. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n_x! = x(x+1)\ldots((x+n)$.
   a) Montrer que
$$\Gamma(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt.$$
   b) Montrer que
$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \frac{n^x n!}{n_x!}.$$
   c) En déduire un équivalent de $n_x!$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.