Dérivées partielles

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
On a vu dans la feuille précédente que cette fonction n'est pas continue au point $(0,0)$.
- Montrer qu'elle admet pourtant des dérivées partielles au point $(0,0)$.
- Est-elle dérivable au point $(0,0)$ suivant le vecteur $(1,1)$?
- Est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Calculer ses dérivées partielles aux points où elles existent.

3. Etudier l'existence et calculer les dérivées partielles de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = |xy|$.

4. Calculer les dérivees partielles des fonctions suivantes là où elles sont définies :

$$f_1(x,y) = x^3+y^3-2xy \quad f_2(x,y) = \arctan\frac{x}{y} \quad f_3(x,y) = e^{-\frac{x}{y}} \quad f_4(x,y) = \ln(x+\ln y)$$

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
- Montrer que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
- f admet-elle des dérivées partielles secondes ?

6. Soit h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = \dfrac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$.
- Montrer que h admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Calculer $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0,0)$. h est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

7. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et h la fonction définie sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$ par $h(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Calculer les dérivées partielles de h à l'aide de la fonction f'.

8. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$.
- Calculer les dérivées partielles de f aux points $(x,y) \neq (0,0)$ à l'aide de la fonction g'.
- A quelle condition sur g, f admet-elle des dérivées partielles au point $(0,0)$?

9. La fonction $h(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x}$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier. (Voir la feuille précédente).

Etudier l'existence des dérivées partielles de la fonction ainsi prolongée et leur continuité.

10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et a, b, h, k des réels. Pour tout t dans $\mathbb{R}$ on pose $g(t) = f(a + th, b + tk)$.
Calculer $g'(0)$ et $g''(0)$ en fonction des dérivées partielles de f au point (a, b).

11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, \cos(xy))$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.
Déterminer la différentielle de $g \circ f$ en fonction des dérivées partielles de g.

12.

1. Soit $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On definit $F(r, t) = f(r \cos t, r \sin t)$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2. En déduire les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

13. On recherche toutes les fonctions de classe C^1 sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0\}$ vérifiant l'équation

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

1. Vérifier que $\varphi : (x, y) \longmapsto \dfrac{y}{x}$ est solution de (E).

2. Montrer que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, $g \circ \varphi$ est solution de (E).

3. Montrer que pour toute solution f de (E) la fonction $(u, v) \longmapsto f(u, uv)$ ne dépend que de v.

4. Conclure.