Limites, continuité, compacité, connexité par arcs

1. On pose pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Montrer que lorsque $(x,y) \to (0,0)$ on a $x^2 = o(\|(x,y)\|)$, $y^2 = o(\|(x,y)\|)$ et $xy = o(\|(x,y)\|)$.

2. Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :
$\star$ $xy \ln x$ quand $(x,y) \to (0,1)$.
$\star$ $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$ quand $(x,y) \to (0,0)$.
$\star$ $\dfrac{\sin(xy)}{x}$ quand $(x,y) \to (0,2)$.
$\star$ $\dfrac{y}{x}$ quand $(x,y) \to (0,0)$.
$\star$ $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ quand $(x,y) \to (0,0)$.
$\star$ $y \ln x$ quand $(x,y) \to (0,0)$.

3. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

5. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

6. Soit $h(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x}$.
Montrer que l'on peut prolonger h par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier.

7. Soit $\alpha > 0$ et f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x|y|^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

8. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > -1\}$. Dessiner D et montrer que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On définit la fonction g sur D par $g(0,0) = 0$ et $g(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour (x,y) dans $D \setminus \{0\}$. Est-elle continue sur D ?

9. Indiquez si les ensembles suivants sont ouverts ou s'ils sont fermés.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 < 1\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \,\text{et}\; x \geq 0\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < xy < 3\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < xy \,\text{ou}\, x^2 > y + 3\}$$

10. Soit $A = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ 2 \leq xy \leq 4,\ 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9\}$. Dessiner A et montrer que A est compact.

11. Soit $a > 0$ et $D_a = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x^3 + y^3 \leq a^3\}$. Montrer que D_a est compact.

12. Les ensembles suivants sont-ils compacts ?

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^5 = 2\} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy \leq 1\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 8xy \leq 1\} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x(1-2x)\}$$

13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$ Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.
Indication : On pourra considérer $r > 0$ tel que pour tout x vérifiant $\|x\| > r$ on ait $f(x) \geq f(0,0)$.

14. Soit E un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|\|$.

1. Soit A un compact de E. Rappeler pourquoi pour tout x dans E il existe y_0 appartenant à A tel que $\|x - y_0\| = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$. On note alors $d(x, A) = \|x - y_0\|$.
2. Soit A et B deux compacts de E. Montrer qu'il existe x_0 dans A et y_0 dans B tels que $\|x_0 - y_0\| = \inf\limits_{(x,y) \in A \times B} \|x - y\|$. On note alors $\|x_0 - y_0\| = d(A, B)$. En déduire que $d(A, B) > 0$ si et seulement si A et B sont disjoints.

15. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs.

16. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 1\}$ est-il connexe par arcs ? Et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 1\}$?