Opérateurs aléatoires et périodiques en dimension 1 : Estimées de décorrélations et Résonances

Trịnh Tuấn Phong
sous la direction de Frédéric Klopp, IMJ, UPMC

Laboratoire Analyse, Géométrie & Applications
Université Paris 13

15 Septembre 2015

Soutenance de thèse,
LAGA, Université Paris 13

Contents

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

$\text{essRan}\ \omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube"$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Opérateur aléatoire discret avec désordre hors diagonal en dimension 1

Soit $u = \{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On définit

$$\boxed{(H_\omega u)(n) = \omega_n(u(n) - u(n+1)) + \omega_{n-1}(u(n) - u(n-1))}$$

$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: une suite de variables aléatoires i.i.d. qui possède une densité ρ bornée et à support compact.

essRan $\omega_n = [\alpha_0, \beta_0] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ où $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

Quelques faits importants :

Spectre presque sûr : $\omega-$p.s., $\sigma(H_\omega) = \Sigma := [0, 4\beta_0]$.

Densité d'états intégrée $N(E)$: $\omega-$p.s., on a

$$\boxed{N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.ps de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieure à E}\}}{|\Lambda|} \quad \forall E}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est H_ω restreint à un "cube" $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec des conditions périodiques au bord.

Densité d'états $\nu(E)$: $N(E)$ possède une dérivée $\nu(E)$ appelée la densité d'états de H_ω.

Deux inégalités importantes

L'estimée de Wegner (W) :

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{dist}(E,\sigma(H_\omega(\Lambda))) \leqslant \epsilon) \leq \frac{2\|s\rho(s)\|_\infty}{E-\epsilon}\epsilon|\Lambda|}$$

quel que soit le cube $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $0 < \epsilon < E$.

L'estimée de Minami (M) :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\#\{\sigma\left(H_\omega\left(\Lambda\right)\right) \cap J\} \geqslant 2\right) \leqslant C(|J||\Lambda|)^2/2a^2}$$

pour tout $J = [a,b] \subset (0,+\infty)$, et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$.

Remarque (W) et (M) ne sont pas valables à l'énergie 0 (le bord inférieur du spectre presque sûr Σ).

Deux inégalités importantes

L'estimée de Wegner (W) :

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{dist}(E, \sigma(H_\omega(\Lambda))) \leqslant \epsilon) \leq \frac{2\|s\rho(s)\|_\infty}{E-\epsilon}\epsilon|\Lambda|}$$

quel que soit le cube $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $0 < \epsilon < E$.

L'estimée de Minami (M) :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\#\{\sigma\left(H_\omega\left(\Lambda\right)\right) \cap J\} \geqslant 2\right) \leqslant C(|J||\Lambda|)^2/2a^2}$$

pour tout $J = [a, b] \subset (0, +\infty)$, et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$.

Remarque (W) et (M) ne sont pas valables à l'énergie 0 (le bord inférieur du spectre presque sûr Σ).

Deux inégalités importantes

L'estimée de Wegner (W) :

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{dist}(E,\sigma(H_\omega(\Lambda))) \leqslant \epsilon) \leq \frac{2\|s\rho(s)\|_\infty}{E-\epsilon}\epsilon|\Lambda|}$$

quel que soit le cube $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $0 < \epsilon < E$.

L'estimée de Minami (M) :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\#\{\sigma\left(H_\omega\left(\Lambda\right)\right) \cap J\} \geqslant 2\right) \leqslant C(|J||\Lambda|)^2/2a^2}$$

pour tout $J = [a, b] \subset (0, +\infty)$, et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$.

Remarque (W) et (M) ne sont pas valables à l'énergie 0 (le bord inférieur du spectre presque sûr Σ).

Régime localisé

Régime localisé : L'endroit où le spectre de H_ω est purement ponctuel et les fonctions propres associées sont exp. déc. à l'infini.

Théorème [Aizemann, Schenker, Friedrich et Hundertmark '01]

(Loc) : Il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $p > 0$, il existe $q > 0$ et $L_0 > 0$ tels que, pour $L \geqslant L_0$, avec une prob. supérieure à $1 - L^{-p}$, si

- $\varphi_{n,\omega}$ est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda_L)$ associé à une valeur propre $E_{n,\omega}$ dans le régime localisé.
- $x_{n,\omega} \in \Lambda_L$ est un maximum de $x \mapsto |\varphi_{n,\omega}(x)|$ dans Λ_L,

Alors, pour $x \in \Lambda_L$, on a

$$\boxed{|\varphi_{n,\omega}(x)| \leqslant L^q e^{-\nu|x-x_{n,\omega}|}}$$

The point $x_{n,\omega}$ est appelé un centre de localisation de $\varphi_{n,\omega}$ ou $E_{n,\omega}$.

Régime localisé

Régime localisé : L'endroit où le spectre de H_ω est purement ponctuel et les fonctions propres associées sont exp. déc. à l'infini.

Théorème [Aizemann, Schenker, Friedrich et Hundertmark '01]

(Loc) : Il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $p > 0$, il existe $q > 0$ et $L_0 > 0$ tels que, pour $L \geqslant L_0$, avec une prob. supérieure à $1 - L^{-p}$, si

- $\varphi_{n,\omega}$ est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda_L)$ associé à une valeur propre $E_{n,\omega}$ dans le régime localisé.
- $x_{n,\omega} \in \Lambda_L$ est un maximum de $x \mapsto |\varphi_{n,\omega}(x)|$ dans Λ_L,

Alors, pour $x \in \Lambda_L$, on a

$$\boxed{|\varphi_{n,\omega}(x)| \leqslant L^q e^{-\nu|x - x_{n,\omega}|}}$$

The point $x_{n,\omega}$ est appelé un centre de localisation de $\varphi_{n,\omega}$ ou $E_{n,\omega}$.

Contents

Statistique locale des niveaux

Soit $\Lambda = [-L, L]$ un cube dans $\mathbb{Z}$ et E une énergie positive dans le régime localisé.
Supposons que $E_1(\omega,\Lambda) \leqslant E_2(\omega,\Lambda) \leqslant \cdots \leqslant E_{|\Lambda|}(\omega,\Lambda)$ sont les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$.

Niveaux renormalisés en E :

$$\boxed{\xi_n(E,\omega,\Lambda) = |\Lambda|\nu(E)(E_n(\omega,\Lambda) - E)}$$

Processus ponctuel :

$$\boxed{\Sigma(\xi, E,\omega,\Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{\xi_n}(E,\omega,\Lambda)(\xi)}$$

Théorème [Germinet-Klopp'12, Miao'11]

- Soit E une énergie positive dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty, \Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) \rightharpoonup$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Statistique locale des niveaux

Soit $\Lambda = [-L, L]$ un cube dans $\mathbb{Z}$ et E une énergie positive dans le régime localisé.
Supposons que $E_1(\omega, \Lambda) \leqslant E_2(\omega, \Lambda) \leqslant \cdots \leqslant E_{|\Lambda|}(\omega, \Lambda)$ sont les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$.

Niveaux renormalisés en E :

$$\boxed{\xi_n(E, \omega, \Lambda) = |\Lambda|\nu(E)(E_n(\omega, \Lambda) - E)}$$

Processus ponctuel :

$$\boxed{\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{\xi_n}(E, \omega, \Lambda)(\xi)}$$

Théorème [Germinet-Klopp'12, Miao'11]

- Soit E une énergie positive dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) \rightharpoonup$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Statistique locale des niveaux

Soit $\Lambda = [-L, L]$ un cube dans $\mathbb{Z}$ et E une énergie positive dans le régime localisé.
Supposons que $E_1(\omega, \Lambda) \leqslant E_2(\omega, \Lambda) \leqslant \cdots \leqslant E_{|\Lambda|}(\omega, \Lambda)$ sont les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$.

Niveaux renormalisés en E :

$$\boxed{\xi_n(E, \omega, \Lambda) = |\Lambda|\nu(E)(E_n(\omega, \Lambda) - E)}$$

Processus ponctuel :

$$\boxed{\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{\xi_n}(E, \omega, \Lambda)(\xi)}$$

Théorème [Germinet-Klopp'12, Miao'11]

- Soit E une énergie positive dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty, \Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda) \rightharpoonup$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Statistique locale des niveaux

Soit $\Lambda = [-L, L]$ un cube dans $\mathbb{Z}$ et E une énergie positive dans le régime localisé.
Supposons que $E_1(\omega,\Lambda) \leqslant E_2(\omega,\Lambda) \leqslant \cdots \leqslant E_{|\Lambda|}(\omega,\Lambda)$ sont les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$.

Niveaux renormalisés en E :

$$\boxed{\xi_n(E,\omega,\Lambda) = |\Lambda|\nu(E)(E_n(\omega,\Lambda) - E)}$$

Processus ponctuel :

$$\boxed{\Sigma(\xi, E,\omega,\Lambda) = \sum_{n=1}^{|\Lambda|} \delta_{\xi_n}(E,\omega,\Lambda)(\xi)}$$

Théorème [Germinet-Klopp'12, Miao'11]

- Soit E une énergie positive dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty, \Sigma(\xi, E,\omega,\Lambda) \rightharpoonup$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Statistique locale des niveaux (suite)

Considérons deux limites de $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda), \Sigma(\xi, E', \omega, \Lambda)$ pour $E \neq E'$.

- Sont-elles indépendantes ? C'est à dire, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les deux processus ci-dessus convergent-ils faiblement vers deux processus de Poisson indépendants ?
- Oui pour le modèle d'Anderson discret :

Théorème (*Pour le modèle d'Anderson*, [Klopp'11])

- Soient $E \neq E'$ dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$, $\nu(E') > 0$.
- Alors, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\begin{array}{ll}\#\{j; \xi_j(E,\omega,\Lambda) \in U_+\} & = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E',\omega,\Lambda) \in U_-\} & = k_-\end{array}\right\} \xrightarrow[\Lambda \to \mathbb{Z}]{} e^{-|U_+|}\frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_-|}\frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}}$$

- Ce théorème est une conséquence des estimées de décorrélation.

Statistique locale des niveaux (suite)

Considérons deux limites de $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda), \Sigma(\xi, E', \omega, \Lambda)$ pour $E \neq E'$.

- Sont-elles indépendantes ? C'est à dire, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les deux processus ci-dessus convergent-ils faiblement vers deux processus de Poisson indépendants ?
- Oui pour le modèle d'Anderson discret :

Théorème (*Pour le modèle d'Anderson*, [Klopp'11])

- Soient $E \neq E'$ dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$, $\nu(E') > 0$.
- Alors, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\begin{array}{ll}\#\{j; \xi_j(E,\omega,\Lambda) \in U_+\} & = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E',\omega,\Lambda) \in U_-\} & = k_-\end{array}\right\} \xrightarrow[\Lambda \to \mathbb{Z}]{} e^{-|U_+|}\frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_-|}\frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}}$$

- Ce théorème est une conséquence des estimées de décorrélation.

Statistique locale des niveaux (suite)

Considérons deux limites de $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda), \Sigma(\xi, E', \omega, \Lambda)$ pour $E \neq E'$.

- Sont-elles indépendantes ? C'est à dire, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les deux processus ci-dessus convergent-ils faiblement vers deux processus de Poisson indépendants ?
- Oui pour le modèle d'Anderson discret :

Théorème (*Pour le modèle d'Anderson,* [Klopp'11])

- Soient $E \neq E'$ dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$, $\nu(E') > 0$.
- Alors, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\begin{array}{ll} \#\{j; \xi_j(E, \omega, \Lambda) \in U_+\} & = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E', \omega, \Lambda) \in U_-\} & = k_- \end{array}\right\} \underset{\Lambda \to \mathbb{Z}}{\longrightarrow} e^{-|U_+|} \frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_-|} \frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}}$$

- Ce théorème est une conséquence des estimées de décorrélation.

Statistique locale des niveaux (suite)

Considérons deux limites de $\Sigma(\xi, E, \omega, \Lambda), \Sigma(\xi, E', \omega, \Lambda)$ pour $E \neq E'$.

- Sont-elles indépendantes ? C'est à dire, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les deux processus ci-dessus convergent-ils faiblement vers deux processus de Poisson indépendants ?
- Oui pour le modèle d'Anderson discret :

Théorème (*Pour le modèle d'Anderson,* [Klopp'11])

- Soient $E \neq E'$ dans le régime localisé t.q. $\nu(E) > 0$, $\nu(E') > 0$.
- Alors, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\begin{array}{ll} \#\{j; \xi_j(E,\omega,\Lambda) \in U_+\} & = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E',\omega,\Lambda) \in U_-\} & = k_- \end{array}\right\} \underset{\Lambda \to \mathbb{Z}}{\longrightarrow} e^{-|U_+|} \frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_-|} \frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}}$$

- Ce théorème est une conséquence des estimées de décorrélation.

Résultats pour le modèle étudié

Estimée de décorrélation pour l'opérateur aléatoire avec désordre hors diagonal :

Théorème [P. '14]

- Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1/2,1)$ et $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé.
- Quand $\ell \approx L^\alpha$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\begin{cases}\sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E' + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset\end{cases}\right) = o\left(\frac{\ell}{L}\right)}$$

Indépendance asymptotique :

Théorème [P.'14]

- Soit $n \geqslant 2$, on considère $\{E_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans le régime localisé telle que $E_j > 0$, $E_j \neq E_k$ $\forall j \neq k$ et $\nu(E_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les processus $\{\Sigma(\xi, E_j, \omega, \Lambda)\}_{1 \leq j \leq n}$ convergent faiblement vers les processus de Poisson indépendants.

Résultats pour le modèle étudié

Estimée de décorrélation pour l'opérateur aléatoire avec désordre hors diagonal :

Théorème [P. '14]

- Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1/2,1)$ et $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé.
- Quand $\ell \approx L^\alpha$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left\{\begin{array}{c}\sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E' + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset\end{array}\right\}\right) = o\left(\frac{\ell}{L}\right)}$$

Indépendance asymptotique :

Théorème [P.'14]

- Soit $n \geqslant 2$, on considère $\{E_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans le régime localisé telle que $E_j > 0$, $E_j \neq E_k$ $\forall j \neq k$ et $\nu(E_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les processus $\{\Sigma(\xi, E_j, \omega, \Lambda)\}_{1 \leq j \leq n}$ convergent faiblement vers les processus de Poisson indépendants.

Résultats pour le modèle étudié

Estimée de décorrélation pour l'opérateur aléatoire avec désordre hors diagonal :

Théorème [P. '14]

- Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1/2,1)$ et $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé.
- Quand $\ell \approx L^\alpha$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left\{\begin{array}{c}\sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E' + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset\end{array}\right\}\right) = o\left(\frac{\ell}{L}\right)}$$

Indépendance asymptotique :

Théorème [P.'14]

- Soit $n \geqslant 2$, on considère $\{E_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans le régime localisé telle que $E_j > 0$, $E_j \neq E_k$ $\forall j \neq k$ et $\nu(E_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les processus $\{\Sigma(\xi, E_j, \omega, \Lambda)\}_{1 \leq j \leq n}$ convergent faiblement vers les processus de Poisson indépendants.

Résultats pour le modèle étudié

Estimée de décorrélation pour l'opérateur aléatoire avec désordre hors diagonal :

Théorème [P. '14]

- Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1/2,1)$ et $E \neq E' > 0$ dans le régime localisé.
- Quand $\ell \approx L^\alpha$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\begin{Bmatrix} \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E' + L^{-1}(-1,1)) \neq \emptyset \end{Bmatrix}\right) = o\left(\frac{\ell}{L}\right)}$$

Indépendance asymptotique :

Théorème [P.'14]

- Soit $n \geqslant 2$, on considère $\{E_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans le régime localisé telle que $E_j > 0$, $E_j \neq E_k$ $\forall j \neq k$ et $\nu(E_j) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
- Alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, les processus $\{\Sigma(\xi, E_j, \omega, \Lambda)\}_{1 \leq j \leq n}$ convergent faiblement vers les processus de Poisson indépendants.

Remarques

- Quelque soit le modèle aléatoire $\mathbb{Z}^d-$ périodique en dimension d quelconque, (Loc), (W), (M) et (D) $\Longrightarrow$ l'indépendance asymptotique
- Notre stratégie pour prouver l'estimée de décorrélation ci-dessus est adaptable pour le modèle d'Anderson discret unidimensionnel aussi
- "Lower bound" en dimension 1 : Si u est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda)$, il existe un sous-intervalle $J \subset \Lambda$ de taille $O(L^\beta)$ avec $\beta \in (1/2, 1)$ t.q.

$$\boxed{|u(n)|^2 + |u(n+1)|^2 \geqslant e^{-L^\beta/2} \text{ pour tout } n \in J}$$

Remarques

- Quelque soit le modèle aléatoire $\mathbb{Z}^d-$ périodique en dimension d quelconque, (Loc), (W), (M) et (D) $\Longrightarrow$ l'indépendance asymptotique
- Notre stratégie pour prouver l'estimée de décorrélation ci-dessus est adaptable pour le modèle d'Anderson discret unidimensionnel aussi
- "Lower bound" en dimension 1 : Si u est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda)$, il existe un sous-intervalle $J \subset \Lambda$ de taille $O(L^\beta)$ avec $\beta \in (1/2, 1)$ t.q.

$$\boxed{|u(n)|^2 + |u(n+1)|^2 \geqslant e^{-L^\beta/2} \text{ pour tout } n \in J}$$

Remarques

- Quelque soit le modèle aléatoire $\mathbb{Z}^d-$ périodique en dimension d quelconque, (Loc), (W), (M) et (D) $\Longrightarrow$ l'indépendance asymptotique
- Notre stratégie pour prouver l'estimée de décorrélation ci-dessus est adaptable pour le modèle d'Anderson discret unidimensionnel aussi
- "Lower bound" en dimension 1 : Si u est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda)$, il existe un sous-intervalle $J \subset \Lambda$ de taille $O(L^\beta)$ avec $\beta \in (1/2, 1)$ t.q.

$$\boxed{|u(n)|^2 + |u(n+1)|^2 \geqslant e^{-L^\beta/2} \text{ pour tout } n \in J}$$

Contents

Opérateurs de Schrödinger périodique en dimension 1

Soit V un potentiel périodique et $-\Delta$ le Laplacien discret sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. On définit l'opérateur de Schrödinger $H^{\mathbb{Z}} := -\Delta + V$ en dimension 1 :

$$\boxed{(H^{\mathbb{Z}}u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V(n)u(n)}$$

Ensuite, on définit l'opérateur $H^{\mathbb{N}} := -\Delta + V$ agissant sur $\ell^2(\mathbb{N})$ avec condition au bord de Dirichet en 0.

Soit $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ le spectre de $H^{\mathbb{Z}}$ et $\Sigma_{\mathbb{N}}$ le spectre de $H^{\mathbb{N}}$.

- $\Sigma_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{j=1}^{q} B_q$ avec $q \le p$ et $B_q = [c_q, d_q]$; le spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ est absolument continu (a.c.).
- $\Sigma_{\mathbb{N}} = \Sigma_{\mathbb{Z}} \cup \{v_j\}_{j=1}^{m}$ où $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ est le spectre a.c. de $H^{\mathbb{N}}$ et $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ sont des valeurs propres simples associées à des vecteurs propres exponentiellement décroissants.

Opérateurs de Schrödinger périodique en dimension 1

Soit V un potentiel périodique et $-\Delta$ le Laplacien discret sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. On définit l'opérateur de Schrödinger $H^{\mathbb{Z}} := -\Delta + V$ en dimension 1 :

$$\boxed{(H^{\mathbb{Z}}u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V(n)u(n)}$$

Ensuite, on définit l'opérateur $H^{\mathbb{N}} := -\Delta + V$ agissant sur $\ell^2(\mathbb{N})$ avec condition au bord de Dirichet en 0.

Soit $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ le spectre de $H^{\mathbb{Z}}$ et $\Sigma_{\mathbb{N}}$ le spectre de $H^{\mathbb{N}}$.

- $\Sigma_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{j=1}^{q} B_q$ avec $q \leq p$ et $B_q = [c_q, d_q]$; le spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ est absolument continu (a.c.).
- $\Sigma_{\mathbb{N}} = \Sigma_{\mathbb{Z}} \cup \{v_j\}_{j=1}^{m}$ où $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ est le spectre a.c. de $H^{\mathbb{N}}$ et $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ sont des valeurs propres simples associées à des vecteurs propres exponentiellement décroissants.

Opérateurs de Schrödinger périodique en dimension 1

Soit V un potentiel périodique et $-\Delta$ le Laplacien discret sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. On définit l'opérateur de Schrödinger $H^{\mathbb{Z}} := -\Delta + V$ en dimension 1 :

$$\boxed{(H^{\mathbb{Z}}u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V(n)u(n)}$$

Ensuite, on définit l'opérateur $H^{\mathbb{N}} := -\Delta + V$ agissant sur $\ell^2(\mathbb{N})$ avec condition au bord de Dirichet en 0.

Soit $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ le spectre de $H^{\mathbb{Z}}$ et $\Sigma_{\mathbb{N}}$ le spectre de $H^{\mathbb{N}}$.

- $\Sigma_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{j=1}^{q} B_q$ avec $q \leq p$ et $B_q = [c_q, d_q]$; le spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ est absolument continu (a.c.).
- $\Sigma_{\mathbb{N}} = \Sigma_{\mathbb{Z}} \cup \{v_j\}_{j=1}^{m}$ où $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ est le spectre a.c. de $H^{\mathbb{N}}$ et $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ sont des valeurs propres simples associées à des vecteurs propres exponentiellement décroissants.

Opérateurs de Schrödinger périodique en dimension 1

Soit V un potentiel périodique et $-\Delta$ le Laplacien discret sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. On définit l'opérateur de Schrödinger $H^{\mathbb{Z}} := -\Delta + V$ en dimension 1 :

$$\boxed{(H^{\mathbb{Z}}u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V(n)u(n)}$$

Ensuite, on définit l'opérateur $H^{\mathbb{N}} := -\Delta + V$ agissant sur $\ell^2(\mathbb{N})$ avec condition au bord de Dirichet en 0.

Soit $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ le spectre de $H^{\mathbb{Z}}$ et $\Sigma_{\mathbb{N}}$ le spectre de $H^{\mathbb{N}}$.

- $\Sigma_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{j=1}^{q} B_q$ avec $q \leq p$ et $B_q = [c_q, d_q]$; le spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ est absolument continu (a.c.).
- $\Sigma_{\mathbb{N}} = \Sigma_{\mathbb{Z}} \cup \{v_j\}_{j=1}^{m}$ où $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ est le spectre a.c. de $H^{\mathbb{N}}$ et $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ sont des valeurs propres simples associées à des vecteurs propres exponentiellement décroissants.

Opérateurs de Schrödinger périodique en dimension 1 (suite)

Soit L large, on définit :

$$\boxed{H_L^{\mathbb{N}} := -\Delta + V\mathbb{1}_{[0,L]} \text{ sur } \ell^2(\mathbb{N}) \text{ avec condition au bord de Dirichlet en } 0}$$

- $z \in \mathbb{C}^+ \mapsto (z - H_L^{\mathbb{N}})^{-1}$ est bien définie sur $\mathbb{C}^+$. De plus, on peut démontrer que $(z - H_L^{\mathbb{N}})^{-1}$ admet un prolongement méromorphe de $\mathbb{C}^+$ à $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -2] \cup [2, +\infty))$. *Les **résonances** de $H_L^{\mathbb{N}}$ sont alors définies comme étant les pôles du prolongement ci-dessus.*
- Nous nous intéressons aux résonances de $H_L^{\mathbb{N}}$ dont les parties réelles sont près du bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ i.e., on cherche les résonances dans le domaine $I - i\mathbb{R}^+$ où l'intervalle compact I contient les points au bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et la taille de I est petite.

Opérateurs de Schrödinger périodique en dimension 1 (suite)

Soit L large, on définit :

$$\boxed{H_L^{\mathbb{N}} := -\Delta + V\mathbb{1}_{[0,L]} \text{ sur } \ell^2(\mathbb{N}) \text{ avec condition au bord de Dirichlet en } 0}$$

- $z \in \mathbb{C}^+ \mapsto (z - H_L^{\mathbb{N}})^{-1}$ est bien définie sur $\mathbb{C}^+$. De plus, on peut démontrer que $(z - H_L^{\mathbb{N}})^{-1}$ admet un prolongement méromorphe de $\mathbb{C}^+$ à $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-2]\cup[2,+\infty))$. *Les **résonances** de $H_L^{\mathbb{N}}$ sont alors définies comme étant les pôles du prolongement ci-dessus.*
- Nous nous intéressons aux résonances de $H_L^{\mathbb{N}}$ dont les parties réelles sont près du bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ i.e., on cherche les résonances dans le domaine $I - i\mathbb{R}^+$ où l'intervalle compact I contient les points au bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et la taille de I est petite.

Opérateurs de Schrödinger périodique en dimension 1 (suite)

Soit L large, on définit :

$$\boxed{H_L^{\mathbb{N}} := -\Delta + V\mathbb{1}_{[0,L]} \text{ sur } \ell^2(\mathbb{N}) \text{ avec condition au bord de Dirichlet en } 0}$$

- $z \in \mathbb{C}^+ \mapsto (z - H_L^{\mathbb{N}})^{-1}$ est bien définie sur $\mathbb{C}^+$. De plus, on peut démontrer que $(z - H_L^{\mathbb{N}})^{-1}$ admet un prolongement méromorphe de $\mathbb{C}^+$ à $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-2]\cup[2,+\infty))$. *Les* ***résonances*** *de $H_L^{\mathbb{N}}$ sont alors définies comme étant les pôles du prolongement ci-dessus*.
- Nous nous intéressons aux résonances de $H_L^{\mathbb{N}}$ dont les parties réelles sont près du bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ i.e., on cherche les résonances dans le domaine $I - i\mathbb{R}^+$ où l'intervalle compact I contient les points au bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et la taille de I est petite.

Équation de résonance

Soit $L > 0$ et H_L l'opérateur $H_L^{\mathbb{N}}$ restraint sur l'intervalle $[0, L]$ avec les conditions au bord Dirichlet à L. On définit

- $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq L}$ la suite croissante des valeurs propres de H_L.
- $a_k = |\varphi_k(L)|^2$ où $\varphi_k = (\varphi_k(n))_{0 \leq n \leq L}$ est un vecteur propre normalisé associé à λ_k.

Équation de résonance [Klopp'13] :

$$\boxed{S_L(E) := \sum_{k=0}^{L} \frac{a_k}{\lambda_k - E} = -e^{-i\theta(E)}, \qquad E = 2\cos\theta(E),}$$

où $\mathrm{Im}\theta(E) > 0$ et $\mathrm{Re}\theta(E) \in (-\pi, 0)$ quand $\mathrm{Im}E > 0$.

Remarque : C'est les paramètres spectraux λ_k, a_k qui déterminent le comportement de résonances.

Équation de résonance

Soit $L > 0$ et H_L l'opérateur $H_L^{\mathbb{N}}$ restraint sur l'intervalle $[0, L]$ avec les conditions au bord Dirichlet à L. On définit

- $(\lambda_k)_{0\leq k\leq L}$ la suite croissante des valeurs propres de H_L.
- $a_k = |\varphi_k(L)|^2$ où $\varphi_k = (\varphi_k(n))_{0\leq n\leq L}$ est un vecteur propre normalisé associé à λ_k.

Équation de résonance [Klopp'13] :

$$\boxed{S_L(E) := \sum_{k=0}^{L} \frac{a_k}{\lambda_k - E} = -e^{-i\theta(E)}, \qquad E = 2\cos\theta(E),}$$

où $\mathrm{Im}\theta(E) > 0$ et $\mathrm{Re}\theta(E) \in (-\pi, 0)$ quand $\mathrm{Im}E > 0$.

Remarque : C'est les paramètres spectraux λ_k, a_k qui déterminent le comportement de résonances.

Équation de résonance

Soit $L > 0$ et H_L l'opérateur $H_L^{\mathbb{N}}$ restraint sur l'intervalle $[0, L]$ avec les conditions au bord Dirichlet à L. On définit

- $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq L}$ la suite croissante des valeurs propres de H_L.
- $a_k = |\varphi_k(L)|^2$ où $\varphi_k = (\varphi_k(n))_{0 \leq n \leq L}$ est un vecteur propre normalisé associé à λ_k.

Équation de résonance [Klopp'13] :

$$\boxed{S_L(E) := \sum_{k=0}^{L} \frac{a_k}{\lambda_k - E} = -e^{-i\theta(E)}, \qquad E = 2\cos\theta(E),}$$

où $\mathrm{Im}\theta(E) > 0$ et $\mathrm{Re}\theta(E) \in (-\pi, 0)$ quand $\mathrm{Im}E > 0$.

Remarque : C'est les paramètres spectraux λ_k, a_k qui déterminent le comportement de résonances.

Résultats connus précédemment

L'équation de résonances a été étudiée intensivement par Klopp[Klopp '13]

- À l'extérieur du spectre $\Sigma_{\mathbb{N}}$, il existe une zone de taille constant qui ne contient pas de résonances
- À l'intérieur du spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$, on obtient une zone de non résonances dont la largeur est de taille $\frac{1}{L}$
- Pour les résonances les plus proches de l'axe réel : Chaque value propre λ_k à l'intérieur de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ génère une unique résonance z_n et $|\text{Im} z_n| \asymp \frac{1}{L}$. De plus, on obtient une formule asymptotique pour z_n

Remarques :

- Tous résultats ci-dessus sont prouvés sous l'hypothèse que les parties réelles de résonances sont éloignées du bord du spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et ± 2
- Nous voudrions compléter ces résultats en étudiant les résonances près du bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ mais loin de ± 2

Résultats connus précédemment

L'équation de résonances a été étudiée intensivement par Klopp[Klopp '13]

- À l'extérieur du spectre $\Sigma_{\mathbb{N}}$, il existe une zone de taille constant qui ne contient pas de résonances
- À l'intérieur du spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$, on obtient une zone de non résonances dont la largeur est de taille $\frac{1}{L}$
- Pour les résonances les plus proches de l'axe réel : Chaque value propre λ_k à l'intérieur de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ génère une unique résonance z_n et $|\mathrm{Im} z_n| \asymp \frac{1}{L}$. De plus, on obtient une formule asymptotique pour z_n

Remarques :

- Tous résultats ci-dessus sont prouvés sous l'hypothèse que les parties réelles de résonances sont éloignées du bord du spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et ± 2
- Nous voudrions compléter ces résultats en étudiant les résonances près du bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ mais loin de ± 2

Résultats connus précédemment

L'équation de résonances a été étudiée intensivement par Klopp[Klopp '13]

- À l'extérieur du spectre $\Sigma_{\mathbb{N}}$, il existe une zone de taille constant qui ne contient pas de résonances
- À l'intérieur du spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$, on obtient une zone de non résonances dont la largeur est de taille $\frac{1}{L}$
- Pour les résonances les plus proches de l'axe réel : Chaque value propre λ_k à l'intérieur de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ génère une unique résonance z_n et $|\mathrm{Im} z_n| \asymp \frac{1}{L}$. De plus, on obtient une formule asymptotique pour z_n

Remarques :

- Tous résultats ci-dessus sont prouvés sous l'hypothèse que les parties réelles de résonances sont éloignées du bord du spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et ± 2
- Nous voudrions compléter ces résultats en étudiant les résonances près du bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ mais loin de ± 2

Asymptotiques des paramètres spectraux

Numérotation locale : Soit $E_0 \in (-2,2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. On numérote les paramètres spectraux λ_k et a_k dans B_i comme $(\lambda^i_\ell)_\ell, (a^i_\ell)_\ell$ où $0 \le \ell \le n_i$.

Asymptotique de valeurs propres : $\lambda^i_n \asymp E_0 + \frac{(n+1)^2}{L^2}$ pour $\lambda^i_n \in B_i$ près de E_0.

Asymptotique de a_k : Soit $a^i_n \asymp \frac{|\lambda^i_n - E_0|}{L}$ (cas générique) soit $a^i_n \asymp \frac{1}{L}$ (cas non-générique).

Étudions l'équation de résonance sur $[E_0, E_0 + \varepsilon^2] - i[0, \varepsilon^5]$ où $\varepsilon > 0$ est petit.

Figure: Rectangle $\mathcal{B}_{n,\varepsilon}$, cas générique

Asymptotiques des paramètres spectraux

Numérotation locale : Soit $E_0 \in (-2,2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. On numérote les paramètres spectraux λ_k et a_k dans B_i comme $(\lambda^i_\ell)_\ell, (a^i_\ell)_\ell$ où $0 \leq \ell \leq n_i$.

Asymptotique de valeurs propres : $\lambda^i_n \asymp E_0 + \frac{(n+1)^2}{L^2}$ pour $\lambda^i_n \in B_i$ près de E_0.

Asymptotique de a_k : Soit $a^i_n \asymp \frac{|\lambda^i_n - E_0|}{L}$ (cas générique) soit $a^i_n \asymp \frac{1}{L}$ (cas non-générique).

Étudions l'équation de résonance sur $[E_0, E_0 + \varepsilon^2] - i[0, \varepsilon^5]$ où $\varepsilon > 0$ est petit.

Figure: Rectangle $\mathcal{B}_{n,\varepsilon}$, cas générique

Asymptotiques des paramètres spectraux

Numérotation locale : Soit $E_0 \in (-2,2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. On numérote les paramètres spectraux λ_k et a_k dans B_i comme $(\lambda^i_\ell)_\ell, (a^i_\ell)_\ell$ où $0 \leq \ell \leq n_i$.

Asymptotique de valeurs propres : $\lambda^i_n \asymp E_0 + \frac{(n+1)^2}{L^2}$ pour $\lambda^i_n \in B_i$ près de E_0.

Asymptotique de a_k : Soit $a^i_n \asymp \frac{|\lambda^i_n - E_0|}{L}$ (cas générique) soit $a^i_n \asymp \frac{1}{L}$ (cas non-générique).

Étudions l'équation de résonance sur $[E_0, E_0+\varepsilon^2] - i[0,\varepsilon^5]$ où $\varepsilon > 0$ est petit.

Figure: Rectangle $\mathcal{B}_{n,\varepsilon}$, cas générique

Asymptotiques des paramètres spectraux

Numérotation locale : Soit $E_0 \in (-2,2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. On numérote les paramètres spectraux λ_k et a_k dans B_i comme $(\lambda_\ell^i)_\ell, (a_\ell^i)_\ell$ où $0 \leq \ell \leq n_i$.

Asymptotique de valeurs propres : $\lambda_n^i \asymp E_0 + \frac{(n+1)^2}{L^2}$ pour $\lambda_n^i \in B_i$ près de E_0.

Asymptotique de a_k : Soit $a_n^i \asymp \frac{|\lambda_n^i - E_0|}{L}$ (cas générique) soit $a_n^i \asymp \frac{1}{L}$ (cas non-générique).

Étudions l'équation de résonance sur $[E_0, E_0+\varepsilon^2] - i[0,\varepsilon^5]$ où $\varepsilon > 0$ est petit.

Figure: Rectangle $\mathcal{B}_{n,\varepsilon}$, cas générique

Asymptotiques des paramètres spectraux

Numérotation locale : Soit $E_0 \in (-2, 2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. On numérote les paramètres spectraux λ_k et a_k dans B_i comme $(\lambda^i_\ell)_\ell, (a^i_\ell)_\ell$ où $0 \leq \ell \leq n_i$.

Asymptotique de valeurs propres : $\lambda^i_n \asymp E_0 + \frac{(n+1)^2}{L^2}$ pour $\lambda^i_n \in B_i$ près de E_0.

Asymptotique de a_k : Soit $a^i_n \asymp \frac{|\lambda^i_n - E_0|}{L}$ (cas générique) soit $a^i_n \asymp \frac{1}{L}$ (cas non-générique).

Étudions l'équation de résonance sur $[E_0, E_0 + \varepsilon^2] - i[0, \varepsilon^5]$ où $\varepsilon > 0$ est petit.

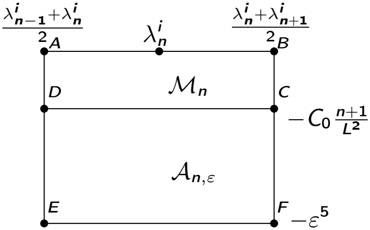


Figure: Rectangle $\mathcal{B}_{n,\varepsilon}$, cas générique

Contents

Résonances en dessous de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$

Théorème [P. '15]

1. Pour chaque valeur propre $\lambda_n^i \in I$ de H_L, il y a une et une seule résonance z_n dans $\mathcal{B}_{n,\varepsilon}$ avec la convention $\lambda_{-1}^i := 2E_0 - \lambda_0$. De plus, $z_n \in \mathcal{M}_n$ et il n'y a pas de résonances dans le rectangle $[E_0 - \varepsilon, E_0] - i\left[0, C_0 \frac{n+1}{L^2}\right]$.
2. On définit $S_{n,L}^i(E) = S_L(E) - \frac{a_n^i}{\lambda_n^i - E}$ et $\alpha_n = S_{n,L}^i(\lambda_n^i) + e^{-i\theta(\lambda_n^i)}$. Alors, il existe $c_0 > 0$ t.q. $c_0 \leq |\alpha_n| \lesssim \frac{1}{\varepsilon^2}$ et
$$\boxed{z_n = \lambda_n^i + \frac{a_n^i}{\alpha_n} + O\left(\frac{(n+1)^4}{L^5|\alpha_n|^3}\right)}$$
3. $\mathrm{Im} z_n$ satisfait
$$\boxed{\mathrm{Im} z_n = \frac{a_n^i \sin(\theta(\lambda_n^i))}{|\alpha_n|^2} + O\left(\frac{(n+1)^4}{L^5|\alpha_n|^3}\right)}$$

Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ t.q. $\frac{\varepsilon^4 (n+1)^2}{CL^3} \leq |\mathrm{Im} z_n| \leq C\frac{(n+1)^2}{L^3}$.

Résonances en dessous de $\mathbb{R} \setminus \Sigma_{\mathbb{N}}$

- Rappelons que $\Sigma_{\mathbb{N}}$ est la réunion de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et l'ensemble fini de valeurs propres simples isolées de $H^{\mathbb{N}}$.

Théorème [P. '15]

Soit $E_0 \in (-2, 2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. Soit $L \in \mathbb{N}^*$ large. Alors, $H_L^{\mathbb{N}}$ n'a pas de résonances dans le rectangle $[E_0 - \varepsilon, E_0] - i[0, \varepsilon^5]$ quand ε est suffisamment petit.

Idée principale de preuves :

- Comportement générique de paramètres spectraux $\Longrightarrow$ $|\mathrm{Im} S_L(E)|$ est petit si $|\mathrm{Im} E|$ n'est pas trop petit $\Longrightarrow$ pas de résonances
- Dans le domaine près de λ_n^i, approximer $S_L(E)$ en gardant le terme $\frac{a_n^i}{\lambda_n^i - E}$ et remplacant les autres par $\sum_{\ell \neq k} \frac{a_\ell}{\lambda_\ell - \lambda_n^i}$. Ensuite, nous nous servons le théorème de Rouché pour décrire les résonances
- Pour obtenir la formule asymptotique de résonances, il est crucial d'étudier la régularité des paramètres spectraux.

Résonances en dessous de $\mathbb{R}\backslash\Sigma_{\mathbb{N}}$

- Rappelons que $\Sigma_{\mathbb{N}}$ est la réunion de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et l'ensemble fini de valeurs propres simples isolées de $H^{\mathbb{N}}$.

Théorème [P. '15]

Soit $E_0 \in (-2, 2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. Soit $L \in \mathbb{N}^*$ large. Alors, $H_L^{\mathbb{N}}$ n'a pas de résonances dans le rectangle $[E_0 - \varepsilon, E_0] - i[0, \varepsilon^5]$ quand ε est suffisamment petit.

Idée principale de preuves :

- Comportement générique de paramètres spectraux $\Longrightarrow$ $|\mathrm{Im} S_L(E)|$ est petit si $|\mathrm{Im} E|$ n'est pas trop petit $\Longrightarrow$ pas de résonances
- Dans le domaine près de λ_n^i, approximer $S_L(E)$ en gardant le terme $\frac{a_n^i}{\lambda_n^i - E}$ et remplacant les autres par $\sum_{\ell \neq k} \frac{a_\ell}{\lambda_\ell - \lambda_n^i}$. Ensuite, nous nous servons le théorème de Rouché pour décrire les résonances
- Pour obtenir la formule asymptotique de résonances, il est crucial d'étudier la régularité des paramètres spectraux.

Résonances en dessous de $\mathbb{R}\backslash\Sigma_{\mathbb{N}}$

- Rappelons que $\Sigma_{\mathbb{N}}$ est la réunion de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et l'ensemble fini de valeurs propres simples isolées de $H^{\mathbb{N}}$.

Théorème [P. '15]

Soit $E_0 \in (-2,2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. Soit $L \in \mathbb{N}^*$ large. Alors, $H_L^{\mathbb{N}}$ n'a pas de résonances dans le rectangle $[E_0 - \varepsilon, E_0] - i[0, \varepsilon^5]$ quand ε est suffisamment petit.

Idée principale de preuves :

- Comportement générique de paramètres spectraux $\Longrightarrow$ $|\mathrm{Im} S_L(E)|$ est petit si $|\mathrm{Im} E|$ n'est pas trop petit $\Longrightarrow$ pas de résonances
- Dans le domaine près de λ_n^i, approximer $S_L(E)$ en gardant le terme $\frac{a_n^i}{\lambda_n^i - E}$ et remplacant les autres par $\sum_{\ell \neq k} \frac{a_\ell}{\lambda_\ell - \lambda_n^i}$. Ensuite, nous nous servons le théorème de Rouché pour décrire les résonances
- Pour obtenir la formule asymptotique de résonances, il est crucial d'étudier la régularité des paramètres spectraux.

Résonances en dessous de $\mathbb{R}\backslash\Sigma_{\mathbb{N}}$

- Rappelons que $\Sigma_{\mathbb{N}}$ est la réunion de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et l'ensemble fini de valeurs propres simples isolées de $H^{\mathbb{N}}$.

Théorème [P. '15]

Soit $E_0 \in (-2,2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. Soit $L \in \mathbb{N}^*$ large. Alors, $H_L^{\mathbb{N}}$ n'a pas de résonances dans le rectangle $[E_0-\varepsilon, E_0] - i[0,\varepsilon^5]$ quand ε est suffisamment petit.

Idée principale de preuves :

- Comportement générique de paramètres spectraux $\Longrightarrow$ $|\mathrm{Im} S_L(E)|$ est petit si $|\mathrm{Im} E|$ n'est pas trop petit $\Longrightarrow$ pas de résonances
- Dans le domaine près de λ_n^i, approximer $S_L(E)$ en gardant le terme $\frac{a_n^i}{\lambda_n^i - E}$ et remplacant les autres par $\sum_{\ell \neq k} \frac{a_\ell}{\lambda_\ell - \lambda_n^i}$. Ensuite, nous nous servons le théorème de Rouché pour décrire les résonances
- Pour obtenir la formule asymptotique de résonances, il est crucial d'étudier la régularité des paramètres spectraux.

Résonances en dessous de $\mathbb{R} \setminus \Sigma_{\mathbb{N}}$

- Rappelons que $\Sigma_{\mathbb{N}}$ est la réunion de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et l'ensemble fini de valeurs propres simples isolées de $H^{\mathbb{N}}$.

Théorème [P. '15]

Soit $E_0 \in (-2, 2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. Soit $L \in \mathbb{N}^*$ large. Alors, $H_L^{\mathbb{N}}$ n'a pas de résonances dans le rectangle $[E_0 - \varepsilon, E_0] - i[0, \varepsilon^5]$ quand ε est suffisamment petit.

Idée principale de preuves :

- Comportement générique de paramètres spectraux $\Longrightarrow$ $|\text{Im} S_L(E)|$ est petit si $|\text{Im} E|$ n'est pas trop petit $\Longrightarrow$ pas de résonances
- Dans le domaine près de λ_n^i, approximer $S_L(E)$ en gardant le terme $\frac{a_n^i}{\lambda_n^i - E}$ et remplacant les autres par $\sum_{\ell \neq k} \frac{a_\ell}{\lambda_\ell - \lambda_n^i}$. Ensuite, nous nous servons le théorème de Rouché pour décrire les résonances
- Pour obtenir la formule asymptotique de résonances, il est crucial d'étudier la régularité des paramètres spectraux.

Résonances en dessous de $\mathbb{R}\setminus\Sigma_{\mathbb{N}}$

- Rappelons que $\Sigma_{\mathbb{N}}$ est la réunion de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ et l'ensemble fini de valeurs propres simples isolées de $H^{\mathbb{N}}$.

Théorème [P. '15]

Soit $E_0 \in (-2,2)$ l'extrémité gauche d'une bande B_i de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$. Soit $L \in \mathbb{N}^*$ large. Alors, $H_L^{\mathbb{N}}$ n'a pas de résonances dans le rectangle $[E_0-\varepsilon, E_0] - i[0,\varepsilon^5]$ quand ε est suffisamment petit.

Idée principale de preuves :

- Comportement générique de paramètres spectraux $\Longrightarrow$ $|\mathrm{Im} S_L(E)|$ est petit si $|\mathrm{Im} E|$ n'est pas trop petit $\Longrightarrow$ pas de résonances
- Dans le domaine près de λ_n^i, approximer $S_L(E)$ en gardant le terme $\frac{a_n^i}{\lambda_n^i - E}$ et remplacant les autres par $\sum_{\ell\neq k} \frac{a_\ell}{\lambda_\ell - \lambda_n^i}$. Ensuite, nous nous servons le théorème de Rouché pour décrire les résonances
- Pour obtenir la formule asymptotique de résonances, il est crucial d'étudier la régularité des paramètres spectraux.

Contents

Équation de résonances rééchelonnées

- Rappelons que $a_n \asymp \frac{1}{L}$ dans le cas non-générique
- En posant $z = L^2(E - E_0)$, $\tilde{a}_k = La_k$ et $\tilde{\lambda}_k = L^2(\lambda_k - E_0)$, l'équation de résonances peut s'écrire comme

$$\boxed{f_L(z) := \sum_{k=0}^{L} \frac{\tilde{a}_k}{\tilde{\lambda}_k - z} = -\frac{1}{L} e^{-i\theta\left(E_0 + \frac{z}{L^2}\right)}}$$

- Soit $(\lambda_\ell^i)_\ell$ les valeurs propres de H_L dans la bande $B_i = [E_0, E_1] \subset \Sigma_{\mathbb{Z}}$. Nous étudions les résonances rééchelonnées dans $\mathcal{D}_n^i = [\tilde{\lambda}_n^i, \tilde{\lambda}_{n+1}^i] - i[0, \varepsilon^5 L^2]$ avec $0 \leq n \lesssim \varepsilon L$ et $\mathcal{R}^i = [0, \tilde{\lambda}_0^i] - i[0, \varepsilon^5 L^2]$

Équation de résonances rééchelonnées

- Rappelons que $a_n \asymp \frac{1}{L}$ dans le cas non-générique
- En posant $z = L^2(E - E_0)$, $\tilde{a}_k = La_k$ et $\tilde{\lambda}_k = L^2(\lambda_k - E_0)$, l'équation de résonances peut s'écrire comme

$$\boxed{f_L(z) := \sum_{k=0}^{L} \frac{\tilde{a}_k}{\tilde{\lambda}_k - z} = -\frac{1}{L} e^{-i\theta\left(E_0 + \frac{z}{L^2}\right)}}$$

- Soit $(\lambda_\ell^i)_\ell$ les valeurs propres de H_L dans la bande $B_i = [E_0, E_1] \subset \Sigma_{\mathbb{Z}}$. Nous étudions les résonances rééchelonnées dans $\mathcal{D}_n^i = [\tilde{\lambda}_n^i, \tilde{\lambda}_{n+1}^i] - i[0, \varepsilon^5 L^2]$ avec $0 \leq n \lesssim \varepsilon L$ et $\mathcal{R}^i = [0, \tilde{\lambda}_0^i] - i[0, \varepsilon^5 L^2]$

Équation de résonances rééchelonnées

- Rappelons que $a_n \asymp \frac{1}{L}$ dans le cas non-générique
- En posant $z = L^2(E - E_0)$, $\tilde{a}_k = La_k$ et $\tilde{\lambda}_k = L^2(\lambda_k - E_0)$, l'équation de résonances peut s'écrire comme

$$\boxed{f_L(z) := \sum_{k=0}^{L} \frac{\tilde{a}_k}{\tilde{\lambda}_k - z} = -\frac{1}{L} e^{-i\theta\left(E_0 + \frac{z}{L^2}\right)}}$$

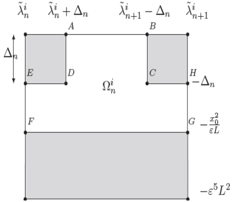
- Soit $(\lambda_\ell^i)_\ell$ les valeurs propres de H_L dans la bande $B_i = [E_0, E_1] \subset \Sigma_{\mathbb{Z}}$. Nous étudions les résonances rééchelonnées dans $\mathcal{D}_n^i = [\tilde{\lambda}_n^i, \tilde{\lambda}_{n+1}^i] - i[0, \varepsilon^5 L^2]$ avec $0 \leq n \lesssim \varepsilon L$ et $\mathcal{R}^i = [0, \tilde{\lambda}_0^i] - i[0, \varepsilon^5 L^2]$

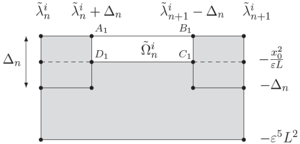
Zones de non résonances

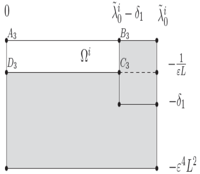
Près de pôles Près de $\tilde{\lambda}_n^i$, $|f_L(z)|$ devient trop grand $\Longrightarrow$ pas de résonances

Loin de l'axe réel Si $|\mathrm{Im} z|$ n'est pas trop petit, $|\mathrm{Im} f_L(z)|$ devient grand $\Longrightarrow$ pas de résonances

Posons $\Delta_n = \frac{(n+1)}{\kappa(\ln(n+1)+1)}$ où $\kappa > 0$ est grand et $x_0 = L^2(\lambda_{n+1}^i - \lambda_n^i)$.





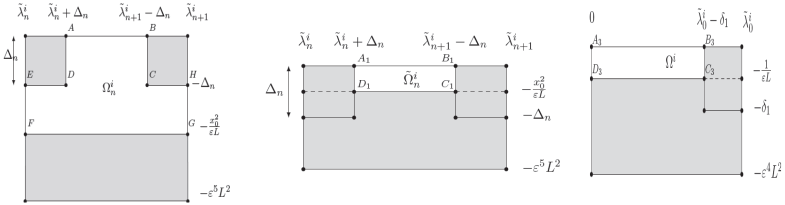


Zones de non résonances

Près de pôles Près de $\tilde{\lambda}_n^i$, $|f_L(z)|$ devient trop grand $\Longrightarrow$ pas de résonances

Loin de l'axe réel Si $|\mathrm{Im} z|$ n'est pas trop petit, $|\mathrm{Im} f_L(z)|$ devient grand $\Longrightarrow$ pas de résonances

Posons $\Delta_n = \frac{(n+1)}{\kappa(\ln(n+1)+1)}$ où $\kappa > 0$ est grand et $x_0 = L^2(\lambda_{n+1}^i - \lambda_n^i)$.



Existence de résonances

Premier cas : Supposons que $n > \frac{\eta L}{\ln L}$ avec $\eta > 0$ petit

Théorème [P. '15]

- Il existe au moins une résonance rééchelonnée dans Ω_n^i.
- Si $-\frac{1}{L}e^{-i\theta(E_0)}$ appartient au $A'B'C'D' = f_L(ABCD)$ où $ABCD = [\tilde{\lambda}_n^i + \Delta_n, \tilde{\lambda}_{n+1}^i - \Delta_n] - i[0, \Delta_n]$, il existe une et une seule résonance rééchelonnée z_n dans Ω_n^i et

$$\boxed{|\mathrm{Im} z_n| \leq \Delta_n = \frac{n}{\kappa \ln n} \asymp \frac{n}{\kappa \ln L} \lesssim \frac{n^2}{\varepsilon L}}$$

Deuxième cas : $\Delta_n \geq \frac{x_0^2}{\varepsilon L} \Leftrightarrow n < \frac{\eta L}{\ln L}$ avec $\eta > 0$ petit

Théorème [P. '15]

f_L est une bijection de $\tilde{\Omega}_n^i$ sur $f_L(\tilde{\Omega}_n^i)$ et $|f_L'(z)| \gtrsim \frac{1}{n^2}$. De plus, il existe une et une seule résonance rééchelonnée $\tilde{z}_n$ in $\tilde{\Omega}_n^i$ et $|\mathrm{Im} \tilde{z}_n| \lesssim \frac{n^2}{\varepsilon L}$.

Existence de résonances

Premier cas : Supposons que $n > \frac{\eta L}{\ln L}$ avec $\eta > 0$ petit

Théorème [P. '15]

- Il existe au moins une résonance rééchelonnée dans Ω_n^i.
- Si $-\frac{1}{L}e^{-i\theta(E_0)}$ appartient au $A'B'C'D' = f_L(ABCD)$ où $ABCD = [\tilde\lambda_n^i + \Delta_n, \tilde\lambda_{n+1}^i - \Delta_n] - i[0, \Delta_n]$, il existe une et une seule résonance rééchelonnée z_n dans Ω_n^i et

$$\boxed{|\mathrm{Im} z_n| \leq \Delta_n = \frac{n}{\kappa \ln n} \asymp \frac{n}{\kappa \ln L} \lesssim \frac{n^2}{\varepsilon L}}$$

Deuxième cas : $\Delta_n \geq \frac{x_0^2}{\varepsilon L} \Leftrightarrow n < \frac{\eta L}{\ln L}$ avec $\eta > 0$ petit

Théorème [P. '15]

f_L est une bijection de $\tilde\Omega_n^i$ sur $f_L(\tilde\Omega_n^i)$ et $|f_L'(z)| \gtrsim \frac{1}{n^2}$. De plus, il existe une et une seule résonance rééchelonnée $\tilde z_n$ in $\tilde\Omega_n^i$ et $|\mathrm{Im}\tilde z_n| \lesssim \frac{n^2}{\varepsilon L}$.

Existence de résonances (suite)

Troisième cas : Résonances dans le domaine $\mathcal{R}^i := [0, \tilde{\lambda}_0^i] - i[0, L^2\varepsilon]$

Théorème [P. '15]

f_L est bijective de Ω^i sur $f_L(\Omega^i)$ et $|f_L'(z)| \geq c > 0$. De plus, $f_L(\Omega^i)$ ne contient pas le point $-\frac{e^{-i\theta(E_0)}}{L}$, donc, il n'y a pas de résonances dans Ω^i

Idée principale de preuves :

- Simplifier l'équation de résonances rééchelonnées par $f_L(z) = -\frac{1}{L}e^{-i\theta(E_0)}$ en utilisant le théorème de Rouché
- Étudions explicitement l'image de domaines où l'on veut chercher les résonances via la fonction $f_L(z)$

Existence de résonances (suite)

Troisième cas : Résonances dans le domaine $\mathcal{R}^i := [0, \tilde{\lambda}_0^i] - i[0, L^2\varepsilon]$

Théorème [P. '15]

f_L est bijective de Ω^i sur $f_L(\Omega^i)$ et $|f_L'(z)| \geq c > 0$. De plus, $f_L(\Omega^i)$ ne contient pas le point $-\frac{e^{-i\theta(E_0)}}{L}$, donc, il n'y a pas de résonances dans Ω^i

Idée principale de preuves :

- Simplifier l'équation de résonances rééchelonnées par $f_L(z) = -\frac{1}{L}e^{-i\theta(E_0)}$ en utilisant le théorème de Rouché
- Étudions explicitement l'image de domaines où l'on veut chercher les résonances via la fonction $f_L(z)$

Contents

Questions ouvertes

- L'étude de résonances de l'opérateur discret associé à un potentiel périodique sur la droite entière est une question que nous poursuivons après cette thèse. Dans ce cas là, les valeurs de $|\varphi_k(L)|^2$ et $|\varphi_k(0)|^2$ vont jouer un rôle crucial.
- Nous voulons également voir ce qui se passe pour les résonances loins du bord du spectre $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ mais près les points ± 2. Notons que, quand on est loin du bord de $\Sigma_{\mathbb{Z}}$, notre méthode ne fonctionne pas. Dans ce cas là, il faut utiliser et améliorer la méthode introduite par Klopp.
- Considérer le cas où $\pm 2 \in \partial\Sigma_{\mathbb{Z}}$.
- Quant à la première partie de ma thèse, malgré notre effort, une estimée de décorrélation pour les modèles discrets en dimension supérieure reste encore un défi.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !