FORMES DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1 - - *Deuxième année* - ⋆

On considère la forme différentielle $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, définie sur le demi-plan $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$. Montrer que ω est exacte. Chercher ses primitives sur U.

Exercice 2 - - *Deuxième année* - ⋆

On considère la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$$

sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$.

1. Montrer que ω est fermée sur U.
2. Montrer de deux façons différentes que ω est exacte.
3. Calculer $\int_{(C)} \omega$, où (C) est une courbe C^1 par morceaux d'origine $A = (1,2)$ et d'extrémité $B = (3,8)$.

Exercice 3 - Une forme différentielle exacte, une ! - *Deuxième année* - ⋆

Soit ω la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$. Montrer que ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$. En déduire l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$ de $A(1,2)$ vers $B(3,4)$.

Exercice 4 - Forme différentielle exacte, et intégration le long d'une cardioïde - *Deuxième année* - ⋆⋆

Soit $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$. Calculer l'intégrale curviligne de ω le long de la demi-cardioïde d'équation en polaire $r = 1 + \cos\theta$, θ allant de 0 à π.

Exercice 5 - Rendre une forme exacte - *Deuxième année* - ⋆⋆

1. Trouver une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant $\varphi(0) = 0$ telle que la forme différentielle ω suivante soit exacte sur $\mathbb{R}^2$:
$$\omega(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx + \varphi(x)dy.$$
2. Donner alors une primitive de ω.
3. En déduire $\int_C \omega$ pour l'ellipse d'équation $3x^2 = -7y^2 + 21$, orientée dans le sens direct.

Exercice 6 - Forme non exacte que l'on rend exacte - *Deuxième année* - ⋆⋆

On considère ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega = (x^2 + y^2 - a^2)dx - 2aydy,$$

où a est un nombre réel non nul.

1. Prouver que la forme différentielle n'est pas exacte.

2. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha(x,y)=f(x)\omega(x,y)$. Quelle condition doit vérifier la fonction f pour que la forme différentielle α soit exacte ? Cette condition est-elle suffisante ? Déterminer une fonction f vérifiant la condition précédente.
3. Calculer une primitive de α sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit Γ le cercle de rayon R et de centre $(0,0)$. Déterminer $\int_\Gamma \alpha$.

Exercice 7 - Primitives en dimension 3 ! - *Math Spé* - ⋆⋆
Soit ω la forme différentielle :

$$\omega=(3x^2y+z^3)dx+(3y^2z+x^3)dy+(3xz^2+y^3)dz.$$

Cette forme admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}^3$? Si oui, les déterminer !

Exercice 8 - Dans l'espace - *Deuxième année* - ⋆⋆
Calculer l'intégrale curviligne $\omega=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ le long du cercle (C) de l'espace :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$$

Intégrales curvilignes

**Exercice 9 - ** - *Deuxième année* - ⋆⋆
Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma y^2dx+x^2dy$ lorsque

1. γ est la courbe d'équation $x^2+y^2-ay=0$, orientée dans le sens trigonométrique.
2. γ est la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}=0$, orientée dans le sens trigonométrique.

Exercice 10 - Le long d'un carré - *Deuxième année* - ⋆
Calculer $\int_C \omega$ où ω est la forme différentielle définie par :

$$\omega=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

et C est le carré orienté de sommets consécutifs $A=(a,a)$, $B=(-a,a)$, $C=(-a,-a)$ et $D=(a,-a)$. En déduire que la forme différentielle n'est pas exacte.

**Exercice 11 - ** - *Deuxième année* - ⋆
Calculer les intégrales curvilignes $\int_C \omega$ dans les exemples suivants :

1. $\omega=xydx+(x+y)dy$, et C est l'arc de parabole $y=x^2$, $-1\leq x\leq 2$, parcouru dans le sens direct.
2. $\omega=y\sin xdx+x\cos ydy$, et C est le segment de droite OA de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$.

Exercice 12 - Autour d'un carré (bis) - *Deuxièmé année* - ⋆
Calculer l'intégrale curviligne de $\omega=\frac{x-y}{x^2+y^2}+\frac{x+y}{x^2+y^2}$ le long du carré $ABCD$, avec $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$, parcouru dans le sens direct.

Exercice 13 - Même origine, même extrémité, mais chemins différents - *Deuxième année* - ⋆
Calculer l'intégrale curviligne de $\omega=x^2dx-xydy$ le long des contours suivants :

– le segment de droite $[OB]$ de $O(0,0)$ vers $B(1,1)$.
– l'arc de parabole $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté dans le sens des x croissants.

Que peut-on en déduire pour la forme différentielle ω ? Retrouver cela par une autre méthode.

Exercice 14 - Autour d'une hélice - *Math Spé* - ⋆

On considère l'arc Γ, arc d'hélice paramétré et orienté par :

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = ht,$$

pour t variant de 0 à 2π. Calculer :

$$I = \int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz.$$

Exercice 15 - Un contour un peu plus délicat - *Deuxième année* - ⋆⋆

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = ydx + 2xdy$ sur le contour du domaine défini par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-2x & \leq & 0 \\ x^2+y^2-2y & \leq & 0 \end{array}\right.$$

parcouru une fois en sens direct.

Exercice 16 - Le long d'une cardioïde - *Deuxième année* - ⋆⋆

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$ le long de la demi-cardioïde (C) d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ fixé, θ variant de 0 à π.

Exercice 17 - Autour d'un cercle de l'espace - *Deuxième année* - ⋆⋆⋆

Calculer $\int_\gamma zdx + xdy + ydz$, où γ est le cercle défini par $x+z=1,\ x^2+y^2+z^2=1$, avec une orientation que l'on choisira.

CIRCULATION D'UN CHAMP DE VECTEURS

**Exercice 18 - ** - *Deuxième année* - ⋆

Soit $V(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ un champ de vecteurs. Calculer sa circulation le long du cercle de centre O et de rayon R. En déduire que ce champ de vecteurs ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 19 - Dans l'espace ! - *Deuxième année* - ⋆

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé, et $\vec{F}$ le champ de vecteurs :

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - 3xy\vec{j} + x^2\vec{k}.$$

Calculer la circulation de ce champ de vecteurs entre les points $O(0,0,0)$ et $P(1,2,-1)$ le long des chemins suivants :

1. $\Gamma_1 : (x = t^2, y = 2t, z = -t)$.
2. Le segment de droite $[O,P]$.

Que peut-on remarquer ? Pourquoi ?

Exercice 20 - Quelques calcul - *Deuxième année* - ⋆

Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de la courbe (C) dans les cas suivants :

1. $\vec{F} = (-y, x)$ et (C) est la demi-ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, parcouru dans le sens direct.
2. $\vec{F} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+1}, \dfrac{y}{x^2+y^2+1}\right)$, et (C) est le cercle $x^2+y^2-2x=1$, parcouru dans le sens direct.
3. $\vec{F} = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2-2z)$, et (C) est la courbe définie par $x = \cos t$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$, $z = \frac{1}{2}\sin t$, avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

FORMULE DE GREEN-RIEMANN

Exercice 21 - - *Deuxième année* - ⋆

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer

$$\int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy,$$

où γ est le bord orienté du domaine délimité par les courbes d'équation $y = x^2$ et $x = y^2$.

Exercice 22 - - *Deuxième année* - ⋆⋆

Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$. Calculer l'intégrale :

$$J = \int\int_D (2x^3 - y)dxdy.$$

Exercice 23 - Comparaison de deux méthodes de calcul - *Deuxième année* - ⋆⋆

Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\}$. Soit γ son bord orienté, et ω la forme différentielle :

$$\omega = xy^2dx + 2xydy.$$

Calculer $\int_\gamma w$:

1. en utilisant une paramétrisation de γ.
2. en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 24 - Aire de l'astroïde - *Deuxième année* - ⋆⋆

Calculer l'aire du domaine délimité par les axes (Ox), (Oy) et la courbe paramétrée $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, \pi]$.

Exercice 25 - Aire d'une arche de cycloïde - *Deuxième année* - ⋆⋆

Calculer l'aire du domaine plan délimité par l'axe (Ox) et l'arc paramétré $x = a(t - \sin t)$ et $y = a(1-\cos t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 26 - Aire comprise entre un disque et une hyperbole - *Deuxième année* - ⋆⋆⋆

Calculer l'aire de $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 4,\ xy \geq 1,\ x > 0\right\}$.

LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE

Exercice 27 - Longueur d'un arche de cycloïde - *Deuxième année* - $\star$

Calculer la longueur d'une arche de cycloïde :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right.$$

avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 28 - Longueur d'une spire d'hélice - *Deuxième année* - $\star$

Calculer la longueur d'une spire d'hélice circulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a\cos t \\ y & = & a\sin t \\ z & = & ht \end{array}\right.$$

avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 29 - Longueur de la cardioïde - *Deuxième année* - $\star$

Calculer la longueur de la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$, avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$.